淺談財經領域常用的基礎數學觀念

陳昱成
高雄市立中山高級中學

壹、前言

2006 年 6 月 18 日自由時報的自由廣場，刊登一位高三社會組考生，抱怨「以台大管理學院、政大商學院來說，十四個校系中，僅採計國英數乙三科者，竟高達十二個，並且全部對數乙加權計分」，讓非以數學見長的社會組考生，處於不利的地位。當然更引來自然組考生的覬覦，一些台大財經系的跨組考生高達七、八成，也難怪社會組學生會發出不平之聲。2011 年政大商學院大學指考招生，除了會計學系和社會組統計系採計歷史與地理，情況依舊，看不到這些傳統的社會組科系採用社會學科做為選才的依據(註一)。

然而就財經科系的特質而言，這樣的選擇有其根據。拿商學院的基礎科目經濟學為例，與數學的關係，早在一九四七年薩孟遜（Paul A. Samuelson），出版經濟學的經典教科書《經濟分析之基礎》(Foundations of Economic Analysis)，藉由數學方程式來解釋經濟學的原理，兩者就結下牢不可分的關係。這本經典奠定了以數理的角度來分析經濟活動的基礎，瑞典皇家科學院所提出其獲獎的原因就強調：「對經濟學的分析水準提昇有顯著的貢獻」。後續的學者，繼續發揚光大，讓許多經濟學文獻，及教科書充滿數學方程式，若無相當的數學背景，難以深入了解理論背後的涵義。在這種趨勢下，數學成了經濟學分析問題的重要工具，因此以「賽局理論」（game theory）見長的數學家納許（John Nash），獲一九九四年諾貝爾經濟學桂冠，就不足為奇了。他的納許均衡，廣泛應用到經濟分析中。2005 另一位數學家 Robert J. Aumann，與另一位經濟學家也因為對賽局理論研究的貢獻，拿下諾貝爾桂冠。今年(2011)兩位計量經濟學家，因為提出數學的分析方法，可以解釋變量之間的因果關係，而獲得肯定，都說明現代經濟學與數學的密切關係。另外統計學也是一個重點科目，沒有良好的數學基礎，研讀經濟與統計必定會遇到不少挫折。再加上一些數學高度相關的科目如財務工程、財務分析，以及分析工具的課程如時間序列、迴歸分析和管理數學、微積分等，佔課程不少的比例，要求學生具備良好的數理基礎，實在無可厚非。

財務經濟(Financial Economics)與數學更為密切。財務經濟學家馬克維茲(Harry Markowitz)、米勒(Merton Miller)及夏普(William F. Sharpe)三人共獲 1990 諾貝爾經濟學獎，顯示財務金融漸成經濟

學的重要一環。不論是馬克維茲的投資組合，或是米勒的 M&M 理論以及夏普的CAMP模型，都充滿了數學方程式。而1997另兩位財務經濟學家，因為「提出對衍生性金融商品定價的新方法」又再次獲得諾貝爾桂冠。其中之一的得主，斯科爾斯(Myron S. Scholes)於 1973 年和布萊克(F. Black)共同推導的著名 Black-Schole 選擇權定價公式(option pricing formula)，加速期貨選擇權交易的成長；另一得主莫頓(Robert C. Merton)則擴大此公式的應用，除了其它衍生性商品外，更延伸到風險管理上。兩位得主奠定現代的財金理論並運用於實際的操作，但要懂他們的公式，沒有深厚的數學、統計基礎，是不可能的。國內財務金融相關學系，僅採計國、英、數，並對數學加重計分，是很有道理。

數學與現代財經學科的密切關係，讓有志於商管科系的學生，必須有具備良好的數理背景的心理準備。就現行的教育制度，高中數學的課程規劃，雖已經注意到數學背景在未來的財經課程的需求，但就以 95 課綱的內容來講(註二)，與財經科系最直接的統計，有機率與統計(I)(II)兩個章節，分別置於第四冊與選修數學(I)，機率與統計(I)著重於敘述統計的部分，外加民意調查的信賴區間與信心水準的解讀；選修(II)雖論及推論統計的部分，僅止於基本的相關分析與簡單的回歸直線，並限於章幅，偏重於實際的應用，對普通高中生而言，很難在機統部分，建立一個清晰的輪廓。因此直接連接大學財經科系的數量基礎科目，略有不足。作者從事高中數學教育近 20 年，又曾涉入財經學門，深知數學在財經研習過程中的重要地位，也略知數學應用於財經學門研修時，一些容易被混淆的概念，進而造成推論的錯誤。因此特以從事教育者的觀點，論述基礎數理概念，並提出簡單卻易被誤用的觀念，也可供教師，做為教學參考資料。

貳、基本觀念

一、平均

研究中常被一堆的數據淹沒，面對浩瀚的「數海」，需要一個代表整體集中趨勢的數字，讓我們對資料有個輪廓，平均就有這個功用。在股票基金績效比較的研究中，無可避免會出現「平均報酬率」，做為績效評估之一，而在統計學上，平均(mean)主要可分成三種。

(一) 算術平均數(Arithmetic mean)

一般化的算法為：

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n}{n},$$

為$x_1,x_2,x_3,\ldots n$筆資料的算術平均數

(二) 加權平均數(weighted mean)

一般化的公式為：

對一組資料 $x_1,x_2,x_3,\ldots x_n$,

若x_i 的權重為$w_i, i=1,2,\ldots,\text{n},$

則加權平均數為$\dfrac{w_1x_1+w_2x_2+\ldots+w_nx_n}{w_1+w_2+\ldots+w_n}$

嚴格來說，算術平均數可以算是加權平均數的一個特例，算術平均數的**權數**都一樣。

(三) 幾何平均(Geometric mean)

一般化的幾何平均數為：

對一組非負的資料 $x_1,x_2,x_3,\ldots x_n$,

其幾何平均數為 $\sqrt[n]{x_1x_2x_3\ldots x_n}$ 。

這三種，常出現於生活中的應用，使用上，提出注意事項，分述於下。

二、三種平均的比較

(一) 算術平均數與幾何平均數

早在成書約於西元前 3 世紀，希臘數學家歐幾里得(Euclid)的巨作《幾何原本》內的第 VI 卷的命題 13 就可以證明「算術平均數**不小於**幾何平均數」,因此需要使用幾何平均的時機，不可誤用算術平均，否則可能「失之毫釐，差之千里」。

一般大眾會傾向利用算術平均數，而非幾何平均數，當然如果經過適當的訓練則能正確的使用。剛好根據 93 學年度大學數學科學科能力測驗的單選題第六題，可以做為筆者推論的依據。題目如下:

台灣證券交易市場規定股票成交價格只能在前一個交易日的收盤價(即最後一筆的成交價)的漲、跌 7% 範圍內變動。例如：某支股票前一個交易日的收盤價是每股 100 元，則今天該支股票每股的買賣價格必須在 93 元至 107 元之間。假設有某支股票的價格起伏很大，某一天的收盤價是每股 40 元，次日起連續五個交易日以跌停板收盤(也就是每天跌 7%)，緊接著卻連續五個交易日以漲停板收盤(也就是每天漲 7%)。請問經過這十個交易日後，該支股票每股的收盤價最接近下列哪一個選項中的價格？(1)39 元　(2) 39.5 元 (3) 40 元 (4) 40.5 元　(5) 41 元。

是大於、等於或小於 40 元?

根據考生答題的資料，繪成圖一。

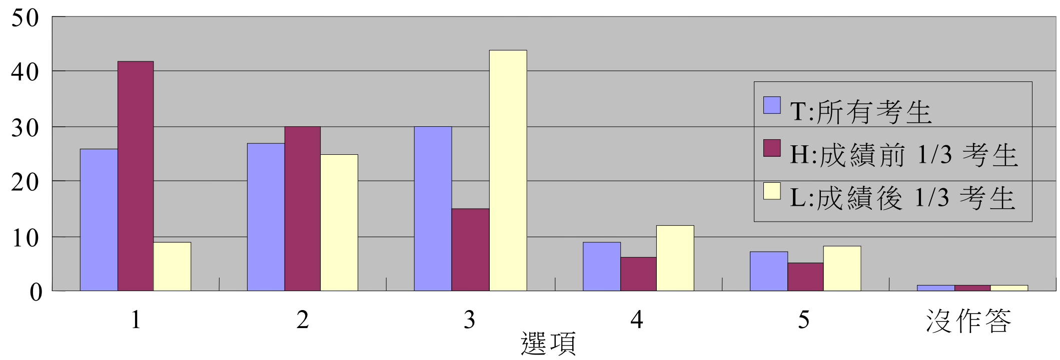


圖 1、考生答題百分比分析圖。1.資料來源: 大學入學考試中心網站。2.T,H,L 分別為全部到考考生,高分組考生(前 33%),低分組考生(後 33%)之答案百分比。 3.除選項外，所有數字皆代表百分比。

正確選項，為 1，最接近 39 元，根據幾何平均的概念求得。有兩個醒目的長條，選項 1 的紅色與選項 3 的淡黃長條，分別代表成績前 1/3 的考生，與後 1/3 考生最多的選項，都將近有一半(分別為 42%與 44%)。考生是為進入大學而參加測驗，因此在測驗這段時間，會接觸較多的數學內容，所以成績較好的考生，有近一半答對，並不足為奇。但對後 1/3 的考生，可能是一些因素，導致對數學厭惡，對數學的熟悉度，與一般大眾接近，他們近一半選擇 40 元。

上述的資料顯示，算術平均數雖然不是合適的答案，卻得到最多的青睞。在財務研究或實務上，會面臨一個問題，長期投資的終期價值(terminal value)和投資組合的預期報酬或公司價值(firm value)的評估都會牽涉到期望報酬(expected return)的估計。利用過去的「平均」報酬來做為預測的指標，沒有人會反對，但是該用算術平均數或是幾何平均數則是學術上的一個長期辯論的問題。Missiakoulis, Vasiliou, and Eriotis (2009)在文獻回顧上，認為利用過去資料的算術平均數來推估未來的期望報酬，獲得最多人的支持，符合一般人的習慣。但是 Indro and Lee(1997)則認為利用算術平均數會有高估最終報酬的現象，而幾何平均數則有低估的情形，也顯示同時考慮兩者的估計值的可能，如 Cooper(1996)的估算方式即是。另外，Breuer, Fuchs, and Mark(2011)則認為根據公司成長程度不同，可用不同的平均來推估。算術平均數與幾何平均數這兩種非常基本的概念，在使用上就可以引起極多的討論，謹慎運用，才是上策。

(二) 算術平均數與加權平均數

雖然加權平均數的使用並不困難，但仍須注意直覺的誤用。先看下表：

表一、兩位 MLB 選手年度打擊率比較表

球季	95	96	97
基特	12/48 0.25	183/582 0.314	190/654 0.291
賈斯提斯	104/411 **0.253**	45/140 **0.321**	163/495 **0.329**

數據來源：http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson_paradox。

一位是洋基的隊長基特(Derek Jeter)，跟一位現已退休的選手賈斯提斯(David Justice)，在基特初入棒壇的前幾年的打擊率的統計資料。數字顯示，從 1995 到 1997 這幾年，賈斯提斯每年的表現都優於基特，所以會直接認定三年來老將的總體表現優於基特。

但如果實際計算三年的合併資料，卻會得到相異的結論，參照表二。

表二、兩位選手年度打擊率與總和打擊率比較表

球季	95	96	97	三年總平均
基特	12/48=0.25	183/582= 0.314	190/654=0..291	385/1284=**0.300**
賈斯提斯	104/411= **0.253**	45/140 = **0.321**	163/495=**0.329**	312/1046=0.298

數據來源: http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson_paradox。

像表一和表二顯示出分類的資料與總和的資料結論相異的情形，統計學上就稱為「辛普森詭論」。雖然這個統計現象名為「辛普森」，但並非由辛普森(Edward H. Simpson)首先發現，早在 19 世紀末 20 世紀初，即有統計學家提過這種現象，只是 1972 年的一篇期刊文章，將這種統計現象命為「辛普森詭論」，後人就跟著使用，有人稱之為「反轉詭論(reversal paradox)」，以避開使用人名的不適切(註三)。

會對這種現象產生訝異，主要還是習慣優先考慮算術平均數，但顯然每年的權數並不同，才會有反直覺的效果產生。Senthilnathan(2009)認為 Ohlson(1995)的股權評價模型(equity valuation model)在兩種解釋方向上呈現不一致的現象，不排除是「辛普森詭論」的一個例子，因此在財務會計研究上，反轉效果的可能性，不能忽略。

三、另一種「平均」--中位數(Median)

攸關學生入學的大學學科能力測驗，有一個重要的指標，寫著「均標」，中心對均標的解釋為:「**成績位於第 50 百分位數之考生級分**」，這種平均在統計上，稱為中位數(median)。

將原始資料從小排到大，中間的「數」即為**中位數**，利用此數來代表集中的趨勢，又是另一種「平均」(average)。

假設某公司只有五個員工，分別是執行長張董、林經理，李課長與黃、許兩職員，年薪分別為一億元、伍佰萬、**一百萬**、六十萬與五十萬。根據定義，中位數為**一百萬元**。

其**算術平均數**為：(10000+500+100+60+50)/5=2142(萬)，以 2141 萬來表示平均年薪，很不適切；用**加權平均數**，權數又難以決定，用中位數的**一百萬元**，是不錯的選擇。Markowitz(1952)的平均—變異數模型(mean-variance model)即隱含著平均的使用，必須考慮到資料離散的程度，即變異數的大小。投資組合的效率前緣(Portfolio Frontier)，即表示最佳的投資組合是在相同的報酬率下，選取最小的變異數，反之其對偶命題可以看成在相同的變異數下，最大投資報酬率的投資即為效率前緣上的投資。在以「平均」為研究變數

時(variable)，若變異數過大，可能要謹慎，用算術平均數做為資料的集中趨勢，要適當的加權，但權數的決定，一般難以客觀訂定，中位數可以列入考量做為「平均」。另外用算術平均的另一個缺點，為易受極端值干擾，當樣本數太少，像張董的年薪太高，造成其值偏高，有四個員工(佔 4/5)遠低於此值。

參、推論統計工具

一、統計檢定與證明

在研究上無可避免會用到推論統計的工具，最基本的就是檢定(test)與相關(correlation)。本小節先討論檢定的基本觀念，下一小節再討論相關的細節。

「假設檢定」(test of hypothesis)，是非常基本的統計概念，要檢定的「假設」稱為虛無假設(null hypothesis)一般以 H_0 表示，與 H_0 相反的假設，就稱為對立假設(alternative hypothesis)一般以 H_a 表示，表三應該不陌生。

表三、假設檢定的四種可能情況

決定的結果 \ 假設的可能	H_0 正確	H_a 正確
接受 H_0	正確	錯誤 (型二錯誤)
拒絕 H_0	錯誤 (型一錯誤)	正確

錯誤有兩種分別稱為型一錯誤(H_0 正確卻誤認其為非；type I error) 與型二錯誤(H_0 不正確卻誤認其為真；type II error)，型一、型二錯誤的機率為 α ， β 。在檢定過程中，一定會產生這兩種錯誤，無法讓此兩種機率同時消失。退而求其次，讓它們同時變小?統計的理論又證明，在固定的樣本數下，α 、β 兩者有抵換(trade off)的效果，降低其中一個，會以提升另一個機率做為代價。換句話說如果增加樣本數，可以同時讓 α 、β 變小，可是在實務上，這意味著成本的大量提升。因此，在有限的時間成本下，會面臨取捨 α、β 的問題，如何抉擇，牽涉到對假設的態度，與反證概念的邏輯思考，論述於下。

(一) α 、β 的抵換效果

如果對 H_0「CEO 持股比例會影響投資行為」的假設做檢定，以極端的情形為例，無論實證數據如何，都一律否定 H_0，則 H_0 為非而被誤認為真的情形絕不會發生，β=0。但此時，即使 H_0 真的是事實，也一定被視為非，型一錯誤 α =1。

如果採取完全相信 H_0 的假設，則任何資料都無法動搖我們的信心，根本不可能發生型一錯誤，α =0，但遺憾的是，β =1。圖二說明 α 與 β 的抵換關係。

(二) 檢定是一種反證法

從圖二可發現當 α 的機率變小，對 H_0 的態度越是寬鬆，表示越容易接受，而 α 與 β 在樣本固定的條件下有

全盤接受 H_0 假設　　　H_0 的態度漸嚴格　　　全盤拒絕 H_0 假設

$\alpha=0$，$\beta=1$　　　　　　　　　　　　　　$\alpha=1$，$\beta=0$

圖二、α 與 β 的抵換關係圖。

抵換的效果，可以先考慮控制 α 的大小。要讓 α 為零，並非辦不到，只要無條件接受 H_0，但這就不需要檢定了。因此將 α 變小，可以看成將對 H_0 的態度變得寬鬆，除非是證據確鑿，否則不輕易拒絕，有保護 H_0 假設的意味。也就是說，當沒有十足把握，我們必須「接受」需無假設，算是一個弱的決策，接受它只是表示 H_0 的假設「可能」是對的；反過來當數據支持 H_a 的行為時，才會拒絕 H_0。相對接受 H_0，拒絕它算是很強的決策，暗示 H_0 的假設「非常可能」是錯誤。因此在檢定時，常將需要保護的檢定，或者否定後會產生嚴重後果的假設，做為虛無假設來檢定，其反面則設為對立假設。

利用圖三可以說明檢定時，將研究的假設當做對立假設，反證虛無假設的謬誤，強化對立假設成立的正當性。

但從數學的觀點來看，這種檢定的反證法是屬於機率上的反證法，與傳統上的「證明」(proof)還是有些出入。遠從古希臘時代，數學就是追求普遍、永恆與放諸四海皆準的真理，必須憑藉著從最簡單的定義、公設出發，根據符合邏輯法則的演繹推論，才能算「證明」(prove)了定理。在數學上經過嚴謹證明後，即是顛撲不破的事實，沒有可能對的模糊地帶。因此使用「證明」一詞，表示百分之百的肯定，不容質疑。根據數學對「證明」的看法，檢定出的決策，仍有錯誤的空間，只是我們可以控制在可以接受的範圍之內。

許多假說，經過檢定的「反證法」，接受或拒絕了虛無假設，間接拒絕或接受對立假設，但不要忘了，接受對立假設會冒著犯型一錯誤的風險，我們可以將檢定的 值設定的非常低，一般為 0.05 甚至 0.01，此稱顯著水準(level of significance)，越低表示否定虛無假設的強度越強，但也不能保證完全正確，所以在研究上，結論可以使用提供「證據」(evidence)，而「證明」的字眼，能免則免。

二、相關(Correlation)

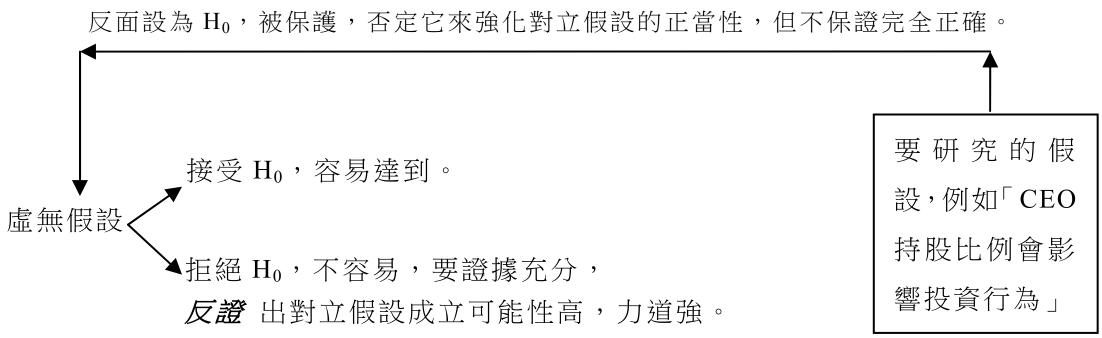
為了檢驗 CEO 持股比例與投資行為的關係，可以將 CEO 持股比例與投資金額對資本額比例的配對資料，畫在坐標平面上，所得的圖形稱為散布圖 (scatter diagram)。從圖中可透過一條虛擬的直線

來描述兩變量的「關係」，而利用直線來說明兩個變量(variable)關係的專門術語稱為**直線相關**(linear correlation)。若從散布圖的點，趨向成為一條正斜率的直線，表示出兩個變量的變化是正向的，稱兩者的「關係」是「**正相關**」(positive correlated)，如圖四所示。

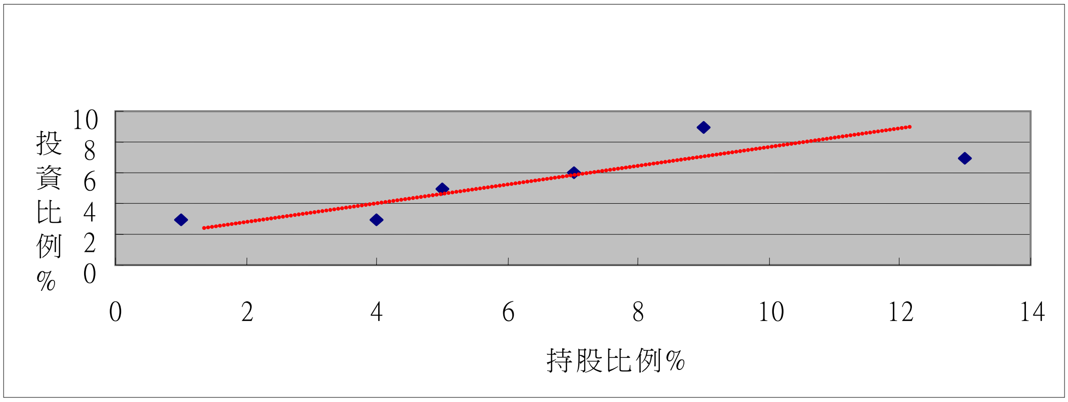
有些資料之間不是正向的關係，反而呈反向的趨勢，就稱為**負相關**(negative correlated)，其虛擬的直線是負斜率。另外第三種：沒有關係，若資料顯示無論持股比例為何，投資比例都維持在一定的比例，統計學對這種兩個變量沒有關係的情況稱為**零相關**(zero correlated)。

(一) 相關係數

直線相關是一般在描述兩個變量的關係時，最先被考慮到的「關係」。由於普遍的使用，有時候會將數據，帶入統計公式中的「相關係數」(correlation coefficient)，利用此值的大小，來判斷「關係」的強弱，而此係數可用電腦軟體，直接幫我們算出，



圖三、檢定是一種反證法，但有別於數學的反證法，不保證完全正確。



圖四、CEO 持股比例與投資行為的散布圖。(資料來源：作者自設，僅為說明正相關的概念，並非實際的數據。)

譬如 Excel 中函數功能的 CORREL 就可運用。如果相關係數的絕對值在 1 和 0.7 之間，就稱為**高度相關**，顯示「關係密切」；若絕對值介於 0.7 到 0.3 之間，就稱為**中度相關**，有關係但並非密切；若絕對值介於 0 和 0.3 之間即稱為**低度相關**，關連性薄弱。理論上，相關係數若為 0，則稱為零相關，表示兩組數據間，並沒有直線上關係，但即使真的沒有關係，實際上的數據，也很難求出 0 這個數，只要求出的相關係數非常小，就表示出兩變量的直線關係薄弱。

(二) 零相關不是一定就「沒關係」

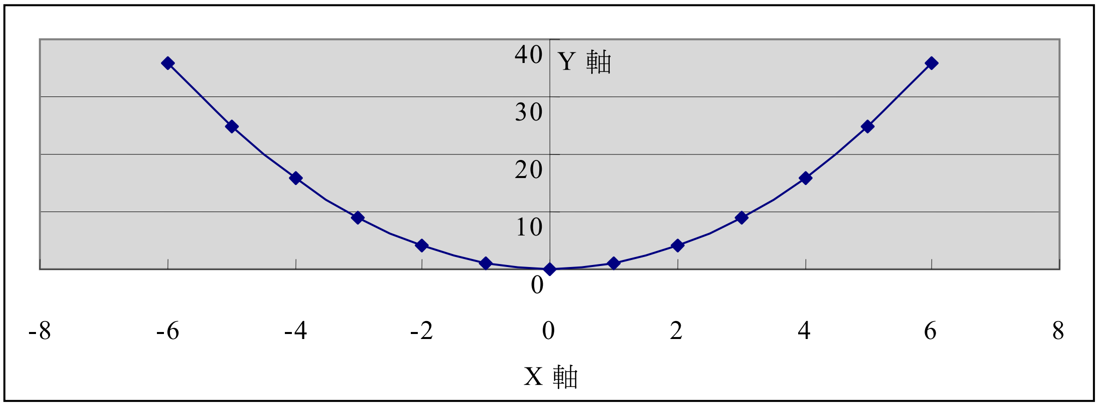
很多的研究會使用相關係數來判斷兩變量的關係，但問題是並非任何資料的關係皆建立在直線的關係上。例如，表四的資料。

根據表四，利用 Excel 的圖表功能，將點用圓滑曲線連接起，得到圖五，是漂亮的拋物線的一部分。X 與 Y 兩組數據關係密切，能用函數 來表示，但相關係數的計算，得到的卻是表示零相關的數字「0」。

表四的數據可以看出相關係數的局限。因為是利用直線來衡量關連，遇到的若非直線相關，如表四的資料，兩個變量是曲線相關 (Curvilinear correlation) 或所謂的非線性相關 (nonlinear correlation)，相關係數是無法衡量此種相關的強度。因此有可能從直線相關來看，變量間是「沒關係」，但實際上卻「有關係」，而且還可能關係非常緊密呢!

表四、 $y = x^2$ 關係下的部分資料

X	1	2	3	4	5	6	-1	-2	-3	-4	-5	-6
y	1	4	9	16	25	36	1	4	9	16	25	36



圖五、 $y = x^2$ 。

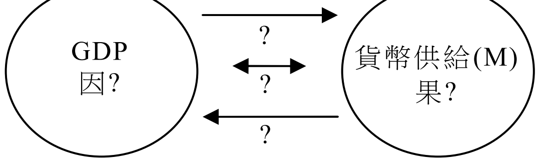
也就因為直線相關限制在直線的關聯，在分析資料時，不能僅看到相關係數非常小，就驟然下結論，認為兩者沒有「關係」。 必須再看看散布圖，或許存有曲線相關，也說不一定，MacGregor, Slovic, Berry and Evensky(1999)，在對財務顧問與規畫者的問卷研究中指出，曲線相關來描述這些財務相關人員的知覺風險與知覺的報酬對風險的比值(perceived return/risk)是比直線相關適切。最新的一份研究，Roca(2011)指出，在富裕的國家，個人所得與快樂的關係，使用二次方程式(quadratic form)來說明，並非不可能。總之，在研究的過程中，曲線相關不能排除。

(三) 高度相關不代表一定有關係

雖然直線相關的使用，有一些限制，但卻沒影響到它被廣泛應用在資料的分析上。普遍的使用，並不保證會被正確使用，看看下面一個有名的例子(註四)。

在世界各地，存有一個普遍的現象，就是冰淇淋的銷售量和溺水的死亡人數，存在正相關。簡單的說，隨著冰淇淋銷售量的增加，溺水的人數也跟著增加。我們可以解釋成因為冰淇淋的消費而造成溺水事件嗎?如果可以如此解釋，則減少溺斃事件的最好方法，就是嚴禁販賣冰淇淋，因為根據正相關的資料顯示，隨著冰淇淋消費的減少，溺斃人數也會隨之減少，如此根本不需要蓋游泳池，訓練民眾游泳自救的能力。只是全世界都看不到，因為防止溺斃事件，而禁止銷售冰淇淋的先例，但是放諸四海，冰淇淋銷售量又的確跟溺斃人數「有關係」，莫非兩者的正相關，有玄機?

直線相關解釋兩變量的關係時，僅說明兩者的變化是同方向還是反方向，或者是毫無瓜葛，卻無法說出兩者的「因果關係」(cause and effect)。像總體經濟學中，GDP 與貨幣供給餘額(M)有正相關，是眾所皆知的一個現象。但要進一步推論出兩者的因果關係，卻非其所能，如圖六所示。直線相關沒辦法驗證因果關係，需要專家進一步的深究，才可確認。例如，2003 年諾貝爾經濟學得主 Clive W.J. Granger，發展出的「格蘭傑因果檢定」(Granger causality test)，可以檢驗某些時間序列的資料是否有因果的關係。Spinthiropoulos, Garefalakis,and Arvanitis (2010)就利用格蘭傑因果檢定，來探討 GDP 與經濟體開放程度的因果關係。



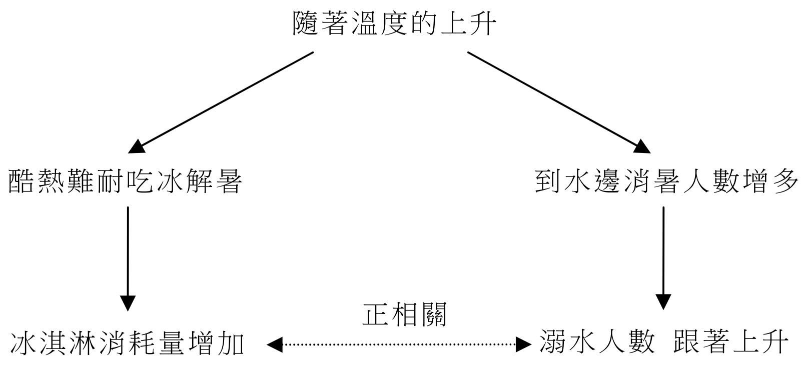
圖六、直線相關無法確認因果關係，若欲推論其因果關係，可以考慮 Granger causality test。

因果關係，無法經由直線相關來確認，更進一步講，即使如冰淇淋銷售量與溺斃人數在數據上真的呈現出正相關現象，除無法確認何者因，何者為果的可能性外，甚至還不能排除兩者根本沒有直接關係的可能！直線相關是用來衡量兩變量的關係，一旦有相關，很多人會認為兩者之間會有因果關係，雖然不確定是何種方向。可是像冰淇淋的例子，推測因為吃多了冰淇淋而造成溺水事件的增加，沒有說服力；反之認為因為溺水事件的增加，而造成冰淇淋銷售的提升，也一樣難以想像。坦白講，直接認定兩者沒有關係，才真會令人信服。從直線相關的「有關係」到根據常識判斷為「沒有關係」，還真是「有關係就沒關係」！

(四) 干擾因素(confounding factor) 的作用

圖七中，兩個無關的變量，卻發現強烈的正相關，然而無論哪個變量當做「因」來解釋，總無法自圓其說。透過圖中太陽所代表的溫度，讓資料上的正相關有合理的解釋。這種潛在的因素，如圖七的溫度，在一般研究稱為**干擾因子**(confounding factor)，是一種外生變數(extraneous variables)，讓原本「沒關係」的變量，呈現數據上的「有關係」，只是有時這種因子並不好找，也可能不同專家會提出不同的因子來解釋相關的原因(註五)，根據 Pearl (1998)的一篇技術報告，甚至認為沒有統計的檢定，能確認兩變量間的正相關，是否是干擾因子所造成。

Hirshleifer and Shumway(2003)從實證資料得到陽光與每日的股票報酬有強烈的正相關(strongly positively correlated), Symeonidis, Daskalakis and Markellos(2010)則認為天氣中的晴天與陰天與股票的波動有關，Fatma and Abaoub (2010)也指出天氣型態與股價有關，以上的文



圖七、干擾因子造成正相關的說明圖。

獻都有實證的資料顯示天氣跟股價有相關，但也都不約而同的認定是因為氣候型態影響心情狀態(mood)，透過此一「干擾因子」，進而影響決策行為，這亦屬於行為經濟學(behavioral economics)的範疇。總之，即使資料上顯示出兩變量存在強烈的相關，是否兩變量的直接作用或是透過干擾因子的作用，必須謹慎以對。

在研究上使用直線相關來評估兩變量的關係，確實非常方便，但一些限制，必須要注意。出現數據上的無直線相關時，有可能是曲線相關，「沒關係就有關係」。如果資料上顯示有關係時，可能有直接的關係，但不無沒有關係的可能，僅是干擾因素的連結所造成，也還真有「有關係就沒關係」。

肆、結論

從定義公理、公設出發，經由符合邏輯的演繹推論，得到定理，是幾何原本對數學發展奠定的重要形式。在現在經濟學的教科書，如 Varian(1997)的個體經濟學，也可以看到這樣的身影，所以數學家獲得諾貝爾桂冠，早已不是大新聞，而財經學家在衍生性商品推導所用的大量數學觀念，常讓人懷疑，沒有深厚的數學背景，能否在這個領域從事研究。當然計量經濟學家，為了研究的目的，也可能發展出新的分析方法(註六)。總體而言，至少在財經領域，數理背景是支撐能否繼續深入研究的重要基礎之一。

也因為數理背景的重要，本文特從教學的角度切入，在最常使用的數理基礎工具上，提出現今容易誤用或輕忽的概念，讓往後在數理工具的使用，觀念更加清晰，推論更嚴謹，結論更加有力。文中的觀念或許簡單，但在演繹邏輯體系下，任何的定理，都是從公理、公設，一步一步推論出來，如果中間有一點差池，再怎麼漂亮的結果，都是鏡花水月，是虛幻的海市蜃樓。因此最基本的基礎的概念，尤其是初次接觸者，必須正確的建立。如果不明就裡的學會代入公式或電腦程式，然後根據計算結果，一知半解的解讀，這是非常危險的事。

「不了解數學的人，對數學的能力過於樂觀，了解數學的人卻過於悲觀」，雖是一句戲謔的話，但也反映出大眾對數學過與不及的期待，它的嚴謹、精確能讓問題簡潔的呈現，限制卻也不少。唯有正確認識所使用的工具，知其含意，才不會有過度或是無力的推論，而能駕馭數學這個有用的工具，而非被工具所役。

附註

註一：資料來自大學招生委員會聯合會，http://www.jbcrc.edu.tw/index1.htm

註二：教育部九十五年正式實施的「普通高級中學課程暫行綱要」(民國九十三年八月卅一日發布、九十四年一月廿日修正發布，簡稱「九五課綱」。)

註三：根據維基百科全書的解釋，http://en.wikipedia.org/wiki/Simpson_paradox.

註四：取自維基百科全書，confounding 的條目，http://en.wikipedia.org/wiki/Confounding_factor.

註五：在醫學文獻上，對干擾因子的探討甚多，主要是藥物對病症的療效出乎預期，而進行推論。

註六：2011 諾貝爾經濟學獎由兩位計量經濟學家 Thomas J. Sargent 和 Christopher A. Sims 共享，因為他們發展的分析方法，可以回答經濟政策和總體經濟變數如 GDP 的因果關係。

參考文獻

黃文璋(2003)，隨機思考論，台北市，華泰文化。

陳昱成(2008)，《學好經濟，從數學開始》，科學月刊，457 期，P.60~63。

陳昱成(2008)，《從財經科系加重數學計分與數學家得諾貝爾經濟學獎談起—以蛛網理論為例，淺論數學在經濟學的應用模式》，科學教育月刊，308 期，P.24~34。

陳昱成(2010)，《爆料文化下的省思—統計檢定的觀點》，科學月刊，489 期，P.695~697。

陳韋伶(2011)，《四則運算簡單嗎?》，科學人，No.113，P.108~112。

Euclid，藍紀正、朱恩寬譯，《Elements》，幾何原本，台北市，九章出版社，1996。

Fisher, Len (2009) , Rock, Paper, Scissors by Len Fisher, 剪刀、石頭、布—生活中的賽局理論，林俊宏譯，第一版，台北市，天下遠見出版股份有限公司。

Gujarati, Damodar N.(2009), Basic Economitrics，計量經濟學(下)，費劍平，孫秋霞譯，台北市，縱橫出版社。

Witte, R.S. & Witte, J. S.(2002), Statistics(5th edition), 基礎統計學，蔡碧惠、邱心怡、游宜君等翻譯，台北市，桂冠出版社。

諾貝爾經濟學大師的智慧，1996-2003，(2004)， 宏泰顧問編輯，台北市，海鴿文化。

Breuer.W, Fuchs. D, and Mark, K.(2011), “Estimating Cost of Capital in Firm Valuations with Arithmetic or Geometric Mean – or Better Use the Cooper Estimator?” Working paper, Social Science Research Network, http://ssrn.com/abstract=1183003.

Cooper, I.,1996, “Arithmetic Versus Geometric Mean Estimators: Setting Discount Rates for Capital Budgeting,” *European Financial Management*, 2, 157-167.

Fatma, H. and E. Abaoub,2010, “Are Daily Stock Market Prices Related to the Weather Effects? Empirical Evidence from the Tunisian Stock Exchange, ” *The IUP Journal of Behavioral Finance*, Vol. VII, 7-28

Hirshleifer,D. A. and T. Shumway, 2003, “Good Day Sunshine: Stock Returns and the Weather, ” *Journal of Finance*, 58, 1009-1032.

Huang, Chi-fu and Litzenberger, R. H.,1988, Foundations for financial economics, New York, Elsevier Science Publishing Co., Inc.

Indro, D. and W. Lee, 1997, “Biases in Arithmetic and Geometric Averages as Estimates of Long-run Expected Returns and Risk Premia,” *Financial Management*, 26, 81-90.

Ko, Hsiu-Hsin, 2010, “A Bootstrap Granger Causality Test Between Exchange Rates and Fundamentals,” Department of Applied Economics, National University of Kaohsiung, http://tea.econ.sinica.edu.tw/index.php?option=com_content&view=article&catid=174:wp038&id=823:wp0130&Itemid=132

Missiakoulis, S., D. Vasiliou and N. Eriotis, 2009, "Arithmetic Mean: A Bellwether for Unbiased Forecasting of Portfolio Performance," Working paper, Social Science Research Network, http://ssrn.com/abstract=1102194

Pearl, J.,1998, "Why There is no Statistical Test for Confounding, Why Many Think There is, and Why They are Almost Right, " UCLA Computer Science Department, Technical Report R-256.

Senthilnathan, S.,2009, "Is the Ohlson (1995) Model an Example of the Simpson's Paradox? " Working paper, Social Science Research Network, http://ssrn.com/abstract=1417746.

Symeonidis, L. , G. Daskalakis and R. N. Markellos, 2010, "Does the Weather Affect Stock Market Volatility? ", *Finance Research Letters*, 7, 214-223.

Varian, HAL R.,1992, Microeconomic Analysis , 3rd Edition, N.Y., W. W. Norton &Company, Inc.

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1990, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1990/

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 1997, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/1997/

The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel 2005, http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economics/laureates/2005