

「摺紙中學數學」之名片試金石

李政憲

新北市林口國民中學

我們在路上與人寒暄，或是到某些店家消費，決定下次再來，不免會向人要些名片；然而久了不用了，這些名片就塵封在皮夾或抽屜的某個角落，似乎不會再去用它，殊不知這些名片裏蘊含了寶貴的數學訊息，十分值得我們去探討與研究。

近年來由於科技日新月異，個人化及客製化的名片更是層出不窮，樣式與大小琳琅滿目。然而傳統規格的名片(如圖 1)仍是最常見也最易獲得，不知讀者是否曾經研究過傳統名片長比寬的比值？傳統名片

紙最常見的長寬比為黃金比例 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

(此種長方形稱為黃金矩形，參見附錄一與附錄二)，其次為費氏數列前後項的比值；實際上，當費氏數列的項數愈大，其前後項的比值也會愈接近黃金比例，是故兩者的比例仍有其關聯性。



圖 1

要如何確認名片的長寬規格是否為黃金矩形呢？根據黃金比例的值，我們可以透過摺紙，利用以下的幾個步驟完成證明：

1. 取一張常用尺寸的名片紙(不妨多加比照不同商家的名片,取得出現頻率最高者),摺出長邊的中線:(如圖 2)



圖 2

2. 長邊的一半 \overline{AB} 摺至中線後還原:(如下圖 3)

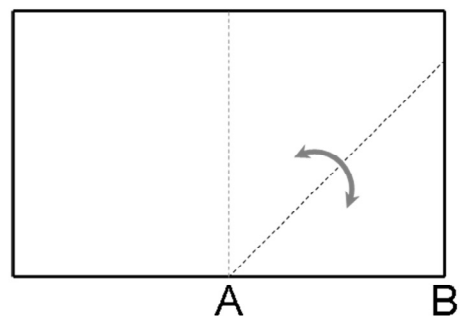


圖 3

3. 摺出第 2 步驟於短邊上產生的點 C 與底邊另一端點 D 的連線 \overline{CD} : (如圖 4)

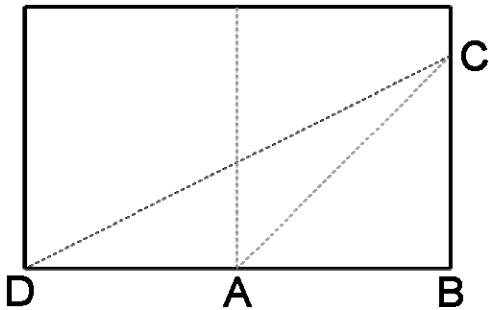


圖 4

4. 將 \overline{BC} 與 \overline{CD} 對齊，摺出 $\angle BCD$ 的角平分線 : (如圖 5 → 圖 6)

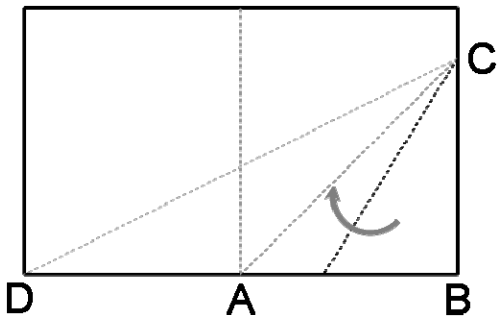


圖 5

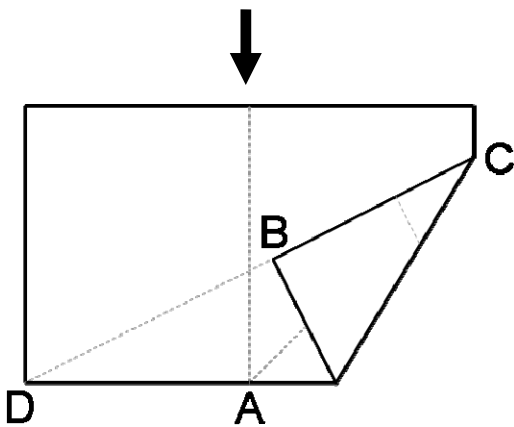


圖 6

5. 將 \overline{DE} 與 \overline{CD} 對齊，摺出 $\angle CDE$ 的角平分線 : (如圖 7 → 圖 8)

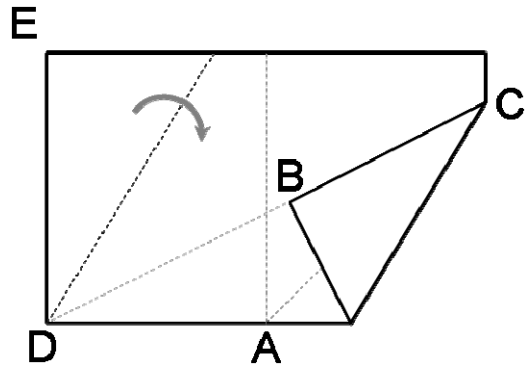


圖 7

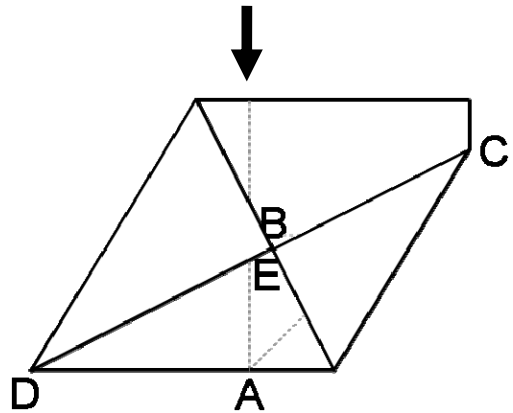


圖 8

奇妙的結果發生了！透過以上幾個簡單的步驟，我們居然讓原矩形右下角的 B 點與左上角的 E 點重合，想想看這告訴我們什麼結論呢？

請見圖 9，若假設名片紙的長為 a ，因為我們摺出中線與等腰直角 $\triangle ABC$ ，故

$$\overline{BC} = \frac{1}{2}a。$$

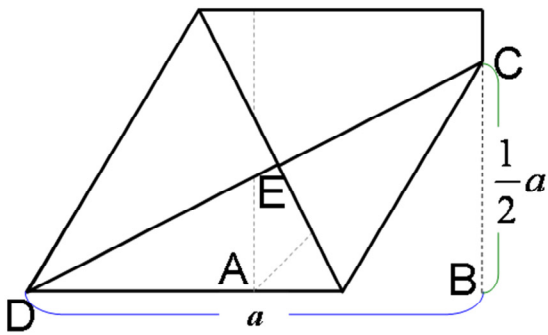


圖 9

根據將 $\angle B$ 摺至 \overline{CD} 的動作與勾股定理的計算， $\overline{BC} = \frac{1}{2}a$ ， $\overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ ，故 $\overline{DE} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}a$ (如圖 10)。

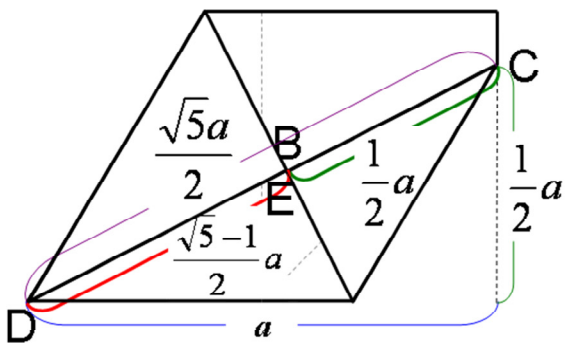


圖 10

將 $\angle B$ 與 $\angle E$ 攤開還原，則我們可以看到原始名片的長寬為 $a : \frac{\sqrt{5}-1}{2}a = (\sqrt{5}+1):2$ (如圖 11)，也就是名片紙長比寬的比值為黃金比例。

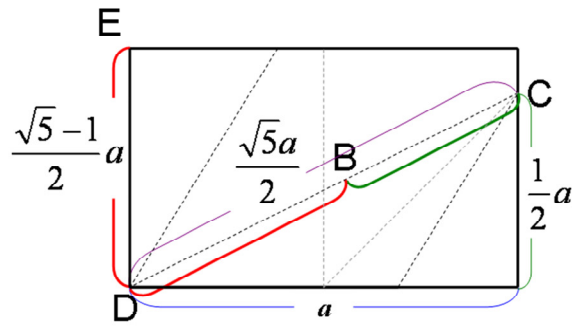


圖 11

是不是特別呢？事實上，根據黃金比例最原始的定義，我們還有另一種更簡單的摺紙方式可以證明它，只是這一次需要兩張黃金矩形的名片與一把剪刀：

1. 將第一張名片的寬邊 \overline{CD} 摺至 \overline{BC} 上，產生等腰直角 $\triangle CDE$ (如圖 12 \rightarrow 圖 13)

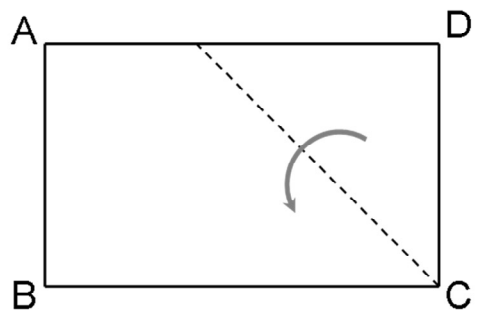


圖 12

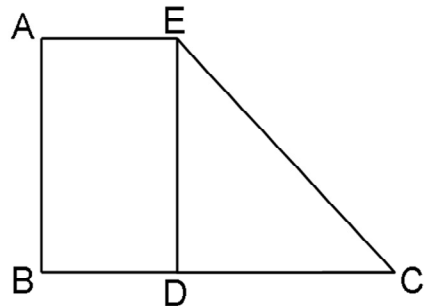


圖 13

2. 沿著 \overline{DE} 將矩形 ABDE 剪下，旋轉 90 度後與第二張名片對齊左上角（如圖 14→圖 15）；

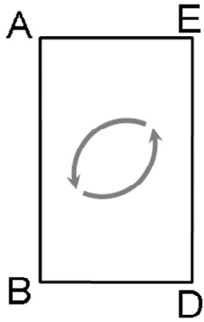


圖 14

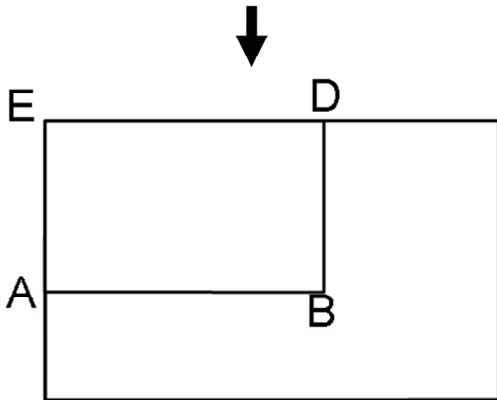


圖 15

3. 分別摺出大小兩個矩形的對角線，發現兩個矩形的對角線會重合！（如圖 16）

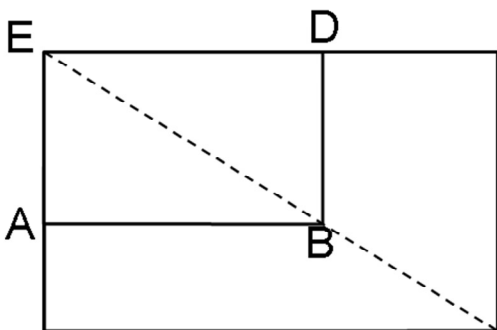


圖 16

因為只要證明長寬比，為了方便起見，這次我們假設原名片的長為 x ，寬為 1，則依裁下後的矩形與原矩形相似（因對角線會對齊），對照圖 17，故可列式得：

$$x : 1 = 1 : (x - 1)$$

即大長方形的長寬比 = 小長方形的長寬比，依比例式乘積可得 $x^2 - x - 1 = 0$ ，依公式解

可計算出 $x = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$ （負不合），即原矩形的長寬比為黃金比例。

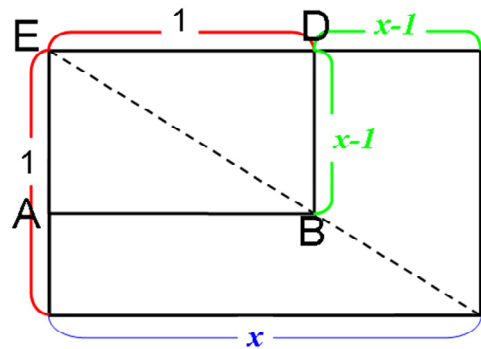


圖 17

第二種方式的摺法較簡單，不過因為牽涉到一元二次方程式公式解的運算，故計算的過程較為複雜。事實上，根據黃金比例的定義（可參考附錄二），在我們發現大小兩個矩形對角線重合構成相似後，原矩形的長寬比即為黃金比例；至於第一種摺法雖然較複雜，不過使用的計算則是根據商高定理（勾股定理）與簡易的根式運算。故以上的兩種摺紙與證明方式，都可以讓讀者在國中八年級上學期（第 3 冊）學完相關課程後，再行補充作相關了解與應用。

討論完名片紙的長寬比後，讀者不妨

檢驗一下手上的名片紙，看看它們的長寬比為多少了（附帶提到一點，圖 1 中有一張名片的長寬比不是黃金比例，不曉得您看得出來是哪一張嗎？）至於蒐集來的名片紙要如何進一步的設計運用呢？筆者曾將此課程納入本校的社團課程活動，結果學生自行設計出豐碩的成果展（如圖 18、圖 19）。也曾在新北市立秀峰高中國中部的數學教師專業成長研習中，分享相關的數學操作與指導經驗，詳細內容將於下一篇文章中介紹。

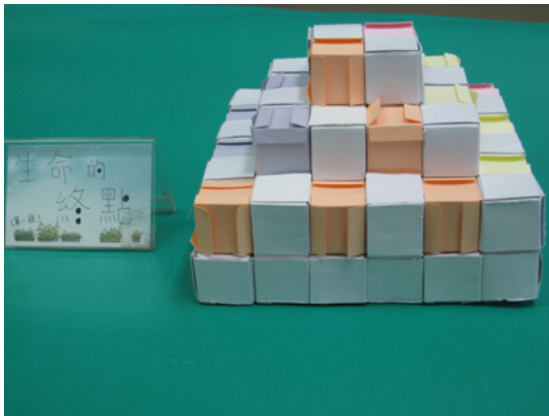


圖 18



圖 19

備註

本文章相關教學簡報，已放置於林中藝數殿堂：<http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math> 中，歡迎有興趣使用的讀者自行下載運用，並請寫信再與我互動。該簡報所繪製使用的軟體為交大陳明璋教授與 AMA 團隊自行研發的 AMA 程式集，外掛於 PowerPoint 軟體中，敬請參閱 <http://ama.nctu.edu.tw/>。

《附錄一》名片紙黃金比例說明網址：

1. 設計-黃金比例@索尼與香蕉王的紅燈人生痞客邦 PIXNET：<http://sony1708.pixnet.net/blog/post/24488522>
2. 印刷昶,icashprint! 痞客邦 PIXNET：<http://icashprint.pixnet.net/blog>
3. 好文设计的黄金比例(A4、名片尺寸比例) - Web Design & Development - 香港硅谷：<http://www.hksilicon.com/kb/cn/articles/2604/A4?mobi=true#>

《附錄二》黃金比例相關介紹：

關於黃金比例的說明、計算、參考資料等連結，建議讀者不妨可參考建國中學知識充電站的說明與推導方式，網址為：http://lib.ck.tp.edu.tw/monthly_theme/0610/0610index.htm