

---

# 棒球比賽宛如是一個馬可夫過程

李中傑

私立真理大學 通識教育中心

## 壹、前言

馬可夫過程(Markov process)已廣泛應用到不同學科的研究。舉凡從描述自然界中懸浮微粒子的布朗運動，到通訊網路中的排隊理論，或是經濟學家對國家經濟發展的預測等等。利用馬可夫過程來建構適當之模型，似乎已成為研究者必備的研究法寶之一。然而學生在首度接觸此馬可夫過程時，往往遇見的障礙並不是此理論擁有太多太複雜的數學，而是此理論太過精簡的數學陳述，反使學生不知如何下手處理問題，更別說利用馬可夫過程的理論架構去解決真實生活中所待解決的問題。

將棒球比賽視為一個馬可夫過程的演進，此構想可追溯至 Howard(1960)的研究，他試圖利用馬可夫過程的理論分析去找出棒球比賽中的最佳戰術，特別是盜壘與短打戰術的使用得失。有了 Howard 對棒球比賽的初步模型後，在擁有深厚棒球文化的美國，便有許多的學者陸續針對棒球比賽提出更為真實的馬可夫過程模型，並作出各方面的決策判斷(Lindsey, 1963; Cook, 1966; Bellman, 1977; Trueman, 1977; Bukiet, Harold, &Palacios, 1997)。近年來國內也開始有學者將馬可夫過程應用在棒球決策上的研究(林珮琿、賴尚毅、黃俊霖

與趙約昇，2007)。而我們若要去分析此棒球與馬可夫模型相關研究為何會如此地蓬勃發展，不難發現其部分原因得歸功於美國大聯盟之記錄完善與現今網路的發達，使任何對此議題有興趣的人均可在家透過網路的傳遞，來獲得處理馬可夫過程所需之原始資料。也正是這個緣故，當今美國的一些知名學府(例如麻省理工學院與喬治亞理工學院等)也陸續開設以棒球為主題之專題研究課程去教授馬可夫過程的理論(Sokol, 2004)，課程中學生可針對自己想去探究的棒球戰術議題，親自從資料的收集開始架構自己的模型，並思考如何把馬可夫過程的理論應用到實際的問題上。最後，在研究型教學的理念上，很重要的一環在於當學生完成自己的課程研究後，其結果可直接與真實的棒球記錄做一比較，以便使手中的專題研究有進一步的後續發展。

有鑑於此，本文作者擬就以國人普遍喜愛的棒球運動來介紹馬可夫過程的基本架構，也期望藉由大眾對棒球比賽的知識，來洞察馬可夫過程是如何地應用到我們周遭的真實問題。文章的架構大致如下：首先在第二節中，我們將對馬可夫過程給一個明確的定義；第三節則是由棒球賽中一

個半局的比賽內容，來看它如何轉換成馬可夫過程的語言。接下來的第四節，我們將針對棒球比賽之馬可夫過程，架構其最根本的轉移矩陣(transition matrix)；第五節是藉由探討棒球比賽中每半局平均會有幾位打者上場打擊，來介紹馬可夫過程的基本理論。有此基本的理論知識之後，我們便可以藉此理論來分析棒球比賽中更有趣的議題，像是第六節的得分期望值與第七節的得分機率。其中第七節的得分機率，不同於過去文獻的作法(Albert, 2003)，根據球賽之轉移矩陣，再利用電腦模擬比賽的可能結果，來統計其得分機率。本文中我們將提出一個新的方法，藉由定義一個變型之轉移矩陣(modified transition matrix)，並由其反矩陣來獲知球賽的得分機率，此方法不僅容易理解還可縮短處理問題的時間。最後的第八節是作者對本文的結論。

由於本文是要由眾人所熟悉的棒球比賽出發，來介紹馬可夫過程之理論。其中的一個目的，便是要讓對數學已懷有恐懼之心的學生，能藉由棒球的議題重新引發他們對數學的興趣，並進而讓他們也能明瞭馬可夫過程的理論。因此在書寫此文章時，我將盡量避免過多數學上的抽象陳述，並且加入許多棒球迷的日常用語，來增加此數學相關文章的親切度。最後，也期望所有俱備基礎機率概念與矩陣乘法運算能力的人均能從此文章有所收穫。

## 貳、馬可夫過程的定義

在進入棒球議題之前，讓我們先介紹何謂是馬可夫過程。同時為了貼切模擬棒球比賽的實際進展狀況，我們所要介紹的馬可夫過程將僅侷限於擁有時間分立(time-discrete)與有限可數狀態(finite and countable)的特殊型態。習慣上，我們常稱此時間分立的馬可夫過程為馬可夫鍊(Markov chain)。如此，令我們所要探究的系統其演進過程的時間序列為  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ ，其中  $t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots$ ，又此系統所有可能出現之狀態所成的集合為  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ 。亦即在任一時刻  $t_i$  下，系統出現的狀態只可能是集合  $X$  中的其中一個，並對應其狀態該有的發生機率(意指在同一時刻，系統可以在任何允許之狀態，但不能同時處於兩個以上的狀態)。當然，假若集合中沒有所謂的終止狀態(absorbing state)，則此過程將會持續不間斷地進行下去。

現在我們假設系統於一開始  $t_0$  到時刻  $t_n$  的狀態依序為  $x_{i'}(t_0), x_{i''}(t_1), \dots, x_i(t_{n-1})$  與  $x_j(t_n)$ ，則對一般的過程來說，此系統依序演進到  $x_j(t_n)$  的機率可以條件機率來表示

$$\Pr\{x_j(t_n) | x_{i'}(t_{n-1}), x_{i''}(t_{n-2}), \dots, x_{i'}(t_0)\} \quad (1)$$

然而，馬可夫過程的最大特點就在於時刻  $t_n$  下出現狀態  $x_j$  的機率，僅與前一時刻  $t_{n-1}$  下的狀態  $x_i$  有關，亦即上式的條件機率可簡化為

$$\begin{aligned} & \Pr\{x_j(t_n) | x_i(t_{n-1}), x_{i''}(t_{n-2}), \dots, x_{i'}(t_0)\} \\ &= \Pr\{x_j(t_n) | x_i(t_{n-1})\} \equiv p_{ij}(t_{n-1}) \end{aligned} \quad (2)$$

這裡  $p_{ij}(t_{n-1})$  可解釋為在時刻  $t_{n-1}$  下由狀態  $x_i$  轉移至狀態  $x_j$  的機率。如此由所有轉移機率元素  $p_{ij}(t_{n-1})$  所組成的  $N \times N$  矩陣 ( $\because 1 \leq i, j \leq N$ )，我們稱為此馬可夫過程在時刻  $t_{n-1}$  下的單次轉移矩陣  $P(t_{n-1})$  (one-step transition matrix)(除非是特別的指明，習慣上我們簡稱的轉移矩陣便是指此單次轉移矩陣)。進一步地，在許多的實例中我們所處理的轉移矩陣不為時間函數，也就是說此矩陣不隨時間的演進而變化，即  $p_{ij}(t_0) = \dots = p_{ij}(t_{n-1}) = p_{ij}(t_n)$ ，如此我們稱此轉移矩陣為穩定之轉移矩陣(stationary transition matrix)：

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{pmatrix} \quad (3)$$

同時，由於轉移矩陣的機率解釋，也使此轉移矩陣中任一行(row)的元素  $p_{ij}$  均俱備有機率分布之特性：

$$\begin{aligned} 0 \leq p_{ij} \leq 1 \quad , \quad 1 \leq i, j \leq N \\ \sum_{j=1}^N p_{ij} = 1 \quad , \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (4)$$

對此馬可夫過程的定義有了初步概念之後，就讓我們先回到棒球場上，來看棒球比賽與馬可夫過程有什麼樣的關係。

### 參、一局上半

就以 2009 年世界冠軍賽洋基對上費

城人的第五場比賽為例，拜王建民之賜在台灣擁有廣大球迷的洋基隊，這天作客費城人的主場，我們就先來看看他們一局上半的進攻實況：

首先上場打擊的是第一棒開路先鋒 Derek Jeter，在一壞球之後擊出了一支二壘方向的滾地球遭封殺出局，一出局。接下來的 Johnny Damon 擊出中外野的一支軟弱飛球，但因落地安打而攻上一壘。但緊接著打擊的 Mark Teixeira 將球打到右外野，遭費城人隊的 Jayson Werth 給接殺出局。二出局，Johnny Damon 仍舊站在一壘的壘包上。下一棒的 Alex Rodriguez 則適時打出一支穿越一壘防線的強勁滾地球，球直奔右外野，不僅讓自己攻上二壘壘包，更有價值的是把 Johnny Damon 從一壘一口氣打回本壘得到這場比賽的第一分。或許受到 A.Rod 這支二壘安打的影響，費城人的王牌投手 Cliff Lee 接下來連投了四顆壞球保送了 A.Rod 的下一棒 Nick Swisher，形成一二壘有人二出局的局面。但下一棒的 Robinson Cano 卻沒有掌握好此時投手不穩的時機，打出一支左外野的飛球遭到接殺出局，也就三出局結束了此半局的進攻。

對球賽的報導，文字記者們或許得盡可能地詳細描述，除了忠實記錄球場戰況的基本要求外，還得讓讀者能從字裡行間還原球場上的氣氛。但在我下面的轉錄中，我將除去所有的細節，僅留賽事本身的主幹，即：一局上，由(時間： $t_0$ ，狀態：無人出局、無人在壘)開始，接下來轉移到：

(時間： $t_1$ ，狀態：一出局、無人在壘)，  
 然後(時間： $t_2$ ，狀態：一出局、一壘有人)，  
 然後(時間： $t_3$ ，狀態：二出局、一壘有人)，  
 然後(時間： $t_4$ ，狀態：二出局、二壘有人)，  
 然後(時間： $t_5$ ，狀態：二出局、一二壘有人)，  
 最後在(時間： $t_6$ ，狀態：三出局)，  
 此局結束。此半局的過程若以圖一來表示  
 就更為清楚。

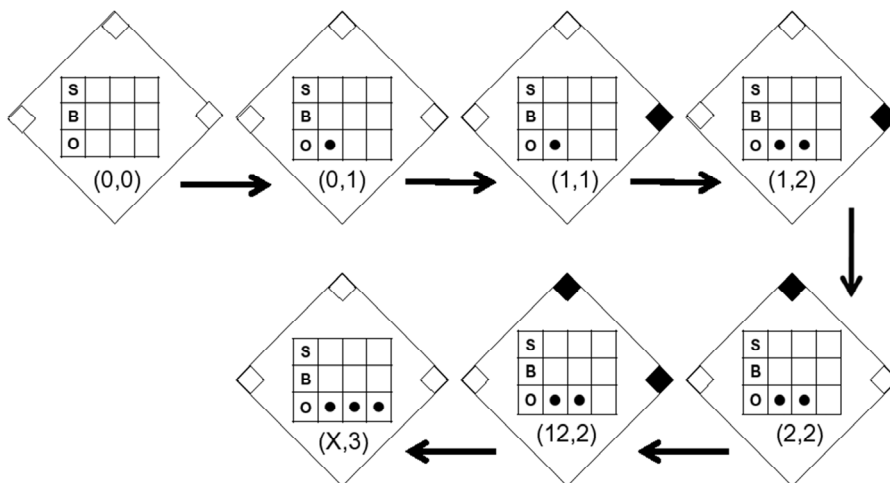
由此我們可理解棒球比賽的進攻，每位打者依棒次上場打擊就如同馬可夫過程中的時間序列，依序把球賽的戰況由一個狀態轉移到另一狀態，且狀態的轉移僅與當下打者的打擊表現有關，而與之前所有的打者無關，這也表現出馬可夫過程的最大特點。同時，我們也知道棒球比賽每一半局只要達到三人出局就得結束，無論壘上已有幾個人，如此我們就得將(狀態：三出局)做為此馬可夫過程的終止狀態，而不再去細分三出局前的壘上跑壘數。

必須說明的是根據這些狀態的轉移

過程，我們也可得知某特定打席結果是否有得分，其公式如下：

$$\text{得分數} = (R_{n-1} + O_{n-1} + 1) - (R_n + O_n) \quad (5)$$

此處  $R_n$  與  $O_n$  分別為時刻  $t_n$  之打者在打擊後壘包上的總跑壘人數與總出局人數，同理  $R_{n-1}$  與  $O_{n-1}$  便是對應時刻  $t_{n-1}$  之打者打擊後的總跑壘人數與總出局人數。例如在我們的例子中 A.Rod 打擊時，其所面對的狀態為  $(R_3 = 1, O_3 = 2)$ ，而在 A.Rod 打後之狀態形成  $(R_4 = 1, O_4 = 2)$ ，所以在這個打席下的得分數為  $(1 + 2 + 1) - (1 + 2) = 1$ ，A.Rod 有一個打點。同樣的方法也可應用到此局別的打者，如我們所預期的，均沒有得分。我們也不難理解此公式的道理在於打擊前後的總人數應不變，所有參與此特定狀態轉移的人數為打擊者本身一人加上打擊時壘上的跑者與出局的總人數，那打擊後在狀態表上少掉的人數便是跑回本壘的得分數。(參見附錄一)



圖一、一局上半的狀態轉移

### 肆、棒球場上的轉移矩陣

在上一個例子中，我們已看到棒球比賽的進行就如同一個馬可夫過程。那在分析馬可夫過程時，其重要的轉移矩陣該如何去架構呢？在回答這問題之前，我們必須清楚知道在棒球比賽中所有可能出現的狀態，此項工作對愛好棒球的球迷來說並不困難。就讓我們先從無人出局的狀況算起，此時壘上可能出現的狀況計有：無人在壘(0,0)(這裡我們使用的標示記法，其定義如下：(跑壘者所在的壘包，出局數))、一壘有人(1,0)、二壘有人(2,0)、三壘有人(3,0)、一二壘有人(12,0)、一三壘有人(13,0)、二三壘有人(23,0)與滿壘(123,0)共 8 個狀態。同樣的壘上狀況，除無人出局外，還可以有一人出局與二人出局，所以此部分總共有  $8 \times 3 = 24$  個狀態。外加三出局這個終止狀態，棒球比賽中所有可能出現的狀態個數總計有 25 個，因此在棒球比賽中的轉移矩陣為一個  $25 \times 25$  的矩陣。為將來描述上的方便，我們也依序將其狀態編號如表格一。

當然，並不是所有任意兩個狀態間均可發生轉移，簡單的例子像是狀態(0,0)就不可能直接轉移到(0,2)的狀態，因為打者不可能在壘上無人時擊出一支雙殺打，如此這兩個狀態間的轉移機率就必定為零( $p_{1,17} = 0$ )。至於轉移機率不為零的就必須根據比賽中實際的統計記錄來決定，我們就以 2009 年美國大聯盟季後賽中的 30 場比賽記錄來做說明(大聯盟官方網站)。在這 30 場的比賽中(狀態 1：無人出局無人

在壘)的局面共出現了 560 次，而它可能轉移成的狀態及其出現次數，根據統計如表格二所示。

表一、狀態編號

狀態編號	狀態	狀態編號	狀態	狀態編號	狀態
1	(0,0)	9	(0,1)	17	(0,2)
2	(1,0)	10	(1,1)	18	(1,2)
3	(2,0)	11	(2,1)	19	(2,2)
4	(3,0)	12	(3,1)	20	(3,2)
5	(12,0)	13	(12,1)	21	(12,2)
6	(13,0)	14	(13,1)	22	(13,2)
7	(23,0)	15	(23,1)	23	(23,2)
8	(123,0)	16	(123,1)	24	(123,2)
				25	(X,3)

表二、狀態(0,0)下的轉移

打擊前			打擊後		
狀態編號	狀態	出現次數	狀態編號	狀態	出現次數
1	(0,0)	560	1	(0,0)	13
			2	(1,0)	123
			3	(2,0)	26
			4	(3,0)	1
			9	(0,1)	397

表格中未列出的狀態轉移則均屬不可能發生之轉移，所以  $p_{1,j} = 0$  ( $j \neq 1,2,3,4,9$ )。至於表中所列出的轉移，例如打者擊出一支陽春全壘打(此轉移也是在此例中唯一可得分的轉移)，在我們的統計中出現 13 次，所以機率為

$$p_{1,1} = \frac{13}{560} \cong 0.023$$

$$P = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{pmatrix}_{25 \times 25} \quad (6)$$

而打者擊出一壘、二壘與三壘安打的次數依序為 123、26 與 1 次，其對應之轉移機率分別為

$$p_{1,2} = \frac{123}{560} \cong 0.220$$

$$p_{1,3} = \frac{26}{560} \cong 0.046$$

$$p_{1,4} = \frac{1}{560} \cong 0.002$$

由  $p_{1,4}$  明顯小於其它壘打數之機率，我們也看見了一場球賽中要打出三壘安打的困難度。最後，打者最有可能的打擊結果 - 出局，則有

$$p_{1,9} = \frac{397}{560} \cong 0.709$$

接近七成的機率。至此我們已把棒球比賽中  $25 \times 25$  的轉移矩陣中的第一列 ( $p_{1,j=1-25}$ ) 設定完成。同樣的方法，表格三列出在 (1,2) 狀態下打擊，轉移到各個狀態的轉移機率 (未列出的轉移表示不可能發生的轉移，所以其轉移機率為零)，同時我們也列出所對應轉移之得分數。

從表格三中我們看見由 (1,2) 狀態轉移到 (1,2) 狀態的機率為零，對此正確的理解是此轉移之發生機率極低。事實上在 2009 年大聯盟季後賽中沒有發生過這樣的狀態轉移，但這樣的轉移，原則是允許的。依此我們便可去計算轉移矩陣中，其它列的每一元素之機率。也由於在狀態編號中，我們把三出局的狀態擺在最後一個狀態，這個轉移矩陣便可寫成下面的形式：

這裡矩陣元素的排列無論是行或列均是由狀態編號 1、狀態編號 2、... 依序到狀態編號 25 為止。其中  $Q$  為所有非終止狀態所組成的次矩陣 (在我們的例子中  $Q$  為  $24 \times 24$  的矩陣)， $R$  則由所有非終止狀態單次轉移至終止狀態之機率所組成的次矩陣 (在我們的例子中  $R$  為  $24 \times 1$  的矩陣)， $I$  則為單位矩陣 (在我們的例子中  $I$  為  $1 \times 1$  的矩陣，即數字 1)。事實上，對所有包含終止狀態之馬可夫過程，其轉移矩陣均可表示成 (6) 式的形式。

表三、狀態 (1,2) 下的轉移

打擊前			打擊後				
狀態編號	狀態	出現次數	狀態編號	狀態	出現次數	出現機率	得分數
18	(1,2)	155	17	(0,2)	6	0.039	2
			18	(1,2)	0	0	1
			19	(2,2)	6	0.039	1
			20	(3,2)	2	0.013	1
			21	(12,2)	25	0.161	0
			22	(13,2)	8	0.052	0
			23	(23,2)	5	0.032	0
			24	(X,3)	103	0.665	0

為更明瞭轉移矩陣  $P$  的結構，讓我們細看其中的  $Q$  矩陣，此  $24 \times 24$  的矩陣可再分為如下的九個  $8 \times 8$  的小矩陣

$$Q_{24 \times 24} = \begin{pmatrix} (A_0)_{8 \times 8} & (B_0)_{8 \times 8} & (C_0)_{8 \times 8} \\ O_{8 \times 8} & (A_1)_{8 \times 8} & (B_1)_{8 \times 8} \\ O_{8 \times 8} & O_{8 \times 8} & (A_2)_{8 \times 8} \end{pmatrix} \quad (7)$$

不難理解其中的三個零矩陣  $O$  是因為棒球規則中規定打擊無法讓出局數變少，所以其轉移機率必定為零；那  $A_0$ 、 $A_1$  與  $A_2$  則表示此次打擊沒有再增加出局數，可能是安打，也可能是保送等等，而矩陣  $A_i$  的下標  $(0, 1, 2)$  則代表此次打擊時的出局數；如此我們也可推知  $B_0$  與  $B_1$  分別代表在無人出局與一人出局下的打擊，而打擊結果則讓出局數又多增加了一人；同理也知  $C_0$  代表無人出局下所打出的一支雙殺打。

同樣的分類法，我們也可把轉移矩陣  $P$  中的  $R$  矩陣表為

$$R_{24 \times 1} = \begin{pmatrix} (D_0)_{8 \times 1} \\ (E_1)_{8 \times 1} \\ (F_2)_{8 \times 1} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$D_0$  為無人出局下的三殺打； $E_1$  為一人出局下的雙殺打；而  $F_2$  則為兩人出後的又一個出局。毫無疑問地， $R$  矩陣中的任一元素都意味著此半局到此結束。(參見附錄二)

## 伍、馬可夫過程的基本理論

有了單次轉移矩陣  $P$  後，根據其定義我們可知棒球場上由狀態  $x_i$  轉移到狀態  $x_j$  的機率為此轉移矩陣所對應的矩陣元素  $P_{ij}$ 。同樣地，若想知道從狀態  $x_i$  經過兩次打擊後轉移到狀態  $x_j$  的機率，也可由轉移矩陣  $P$  相乘兩次來獲得訊息，即

$$P^2 = PP = \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^2 & QR+R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

對此我們可由矩陣相乘的定義來理解，相乘後的矩陣元素為

$$(P^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{25} P_{ik} P_{kj} \quad (10)$$

明顯地，狀態  $x_i$  經過兩次打擊後轉移到狀態  $x_j$  的機率，是先由第一次打擊  $x_i$  到  $x_k$  的機率乘上第二次打擊  $x_k$  到  $x_j$  的機率。但由於第一次打擊後的狀態  $x_k$  可為 25 個狀態中的任一個，因此我們必須把所有的可能性均加起來。此外，值得注意的是  $P^2$  與  $P$  的矩陣形式是相同的，即 (9) 式與 (6) 式有相同的結構形式。

同理，經過三次打擊後的躍遷矩陣為

$$P^3 = P^2 P = \begin{pmatrix} Q^2 & QR+R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q^3 & (Q^2+Q+I)R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

如此下去，我們不難歸納得知，經過  $n$  次打擊後的轉移矩陣為

$$P^n = P^{n-1} P = \begin{pmatrix} Q^n & (Q^{n-1} + \dots + Q + I)R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

接下來，我們就來看由這些馬可夫過程的轉移矩陣，我們可獲得哪些有趣的訊息來

幫助棒球場上的決策。

首先出現的問題是若從  $x_i$  狀態下的打者算起到半局結束，大概還會有幾個打者可以上場打擊？大家都知道，棒球比其它團體球賽有趣的就是當你支持的球隊落後時，即便到了最後半局的進攻，只要球隊不要三人出局，比賽就可無限的延長下去，永遠存有反敗為勝的機會。前洋基隊的球星與教練貝拉(Yogi Berra)就曾說：「球賽不到結束，不算結束。」那我們真正地想問的問題，應該是機率上由  $x_i$  狀態算起到半局結束，最有可能幾個打者上場打擊。這訊息對教練換不換代打的調度決策可是有幫助的。言歸正傳，我們就來看這問題該如何解答。

我們先把問題改變一下。由狀態  $x_i$  打擊一次後轉移到狀態  $x_j$  的期望次數有多少，這問題等同於玩機率遊戲中每個事件所出現的期望值(事件值×機率)一樣，即

$$1 \cdot Q_{ij} \quad (13)$$

這裡我們排除掉終止狀態(即  $i, j \neq 25$ )，因為一但到了終止狀態整個半局便立即結束，我們也就無從再討論下去。那 (13) 式中乘上的 1 代表此次打擊若轉移到狀態  $x_j$  我們就計次一次。同樣地，狀態  $x_i$  下打擊兩次後轉移到狀態  $x_j$  的期望打擊次數應為  $1 \cdot (Q^2)_{ij}$  次；打擊三次為  $1 \cdot (Q^3)_{ij}$  次。如此下去，從第一次打擊、第二次打擊、...、到第  $n$  次打擊，其間過程出現由狀態  $x_i$  到狀態  $x_j$  的期望打次為

$$1 \cdot Q_{ij} + 1 \cdot (Q^2)_{ij} + \dots + 1 \cdot (Q^n)_{ij} \quad (14)$$

此外我們若再納入開始打擊的狀態  $x_i$  即為  $x_j$  的情況，則我們還得在 (14) 式上再多加上一次的打數。如此寫成矩陣的形式為

$$I + Q + Q^2 + \dots + Q^n \quad (15)$$

前面我們也提到，理論上只要不是三出局，棒球比賽的每個半局是可無限制的延續下去。因此，理論上我們可令 (15) 式中的  $n$  趨近無限大，且根據轉移矩陣  $P$  的機率特性，(6) 式中的  $R$  不為零矩陣 ( $R \neq O$ )，所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^n \rightarrow O \quad (16)$$

如此 (15) 式為一收斂的級數。我們可定義矩陣  $W$  為

$$W \equiv I + Q + Q^2 + \dots = (I - Q)^{-1} \quad (17)$$

習慣上，我們稱此矩陣  $W$  為擁有終止狀態之馬可夫過程的基礎矩陣(fundamental matrix)，有了此基礎矩陣我們便可挖掘出許多有用的訊息。在進一步介紹此基礎矩陣之用處之前，我們不妨先看一下 (17) 式的簡單證明：

$$\begin{aligned} W &= I + Q + Q^2 + \dots \\ &= I + Q(I + Q + Q^2 + \dots) \\ &= I + QW \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Rightarrow (I - Q)W = I \quad (19)$$

$$\Rightarrow W = (I - Q)^{-1} \quad (20)$$

現在我們就回到我們先前的問題：若



從  $x_i$  狀態下的打者算起到半局結束，大概還會有幾個打者可以上場打擊？同樣地，我們以 2009 年美國大聯盟季後賽之記錄為例。在建立好轉移矩陣  $P$  後，即便扣除掉包含終止狀態的最後一行與最後一列後，所剩的矩陣  $Q$  仍是一個  $24 \times 24$  的大矩陣。所幸我們現在已有許多數值分析的套裝軟體可幫我們處理這些大矩陣的煩瑣計算。我們就直接以計算後的結果來說明這基礎矩陣  $W$  所能給的訊息。(此基礎矩陣  $W$  的確切值請參見附錄三)。

此基礎矩陣的第一列 ( $W_{1,i}; i=1 \sim 24$ ) 之各元素值如下面表格四所示。

由於第一列的起始狀態是 (0,0)，無人出局無人在壘，這也是棒球比賽每一半局的開始，於是上表的結果告訴我們： $W_{1,1} = 1.036$  代表在一個進攻半局中 (0,0) 狀態會出現 1.036 次，其中整數 1 由每半局開打的首位打者所貢獻，而剩餘的 0.036 則為此局在一人出局前擊出全壘打的期望次數；同理， $W_{1,2} = 0.234$  代表在一個進攻半局中 (1,0) 狀態會出現 0.234 次； $W_{1,3} = 0.059$  為進攻半局中 (2,0) 狀態會出現 0.059 次。依

此類推，此基礎矩陣  $W$  的第一列，依序給出每半局裡面所有狀態的可能出現次數，那每半局可能上場打擊的人次就會是此矩陣  $W$  的第一列元素的總和，即

$$\sum_{i=1}^{24} W_{1,i} = 4.294 \quad (21)$$




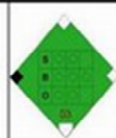
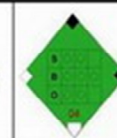
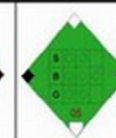


同理在這  $24 \times 24$  的矩陣  $W$  中，第二列的總和

$$\sum_{i=1}^{24} W_{2,i} = 4.178 \quad (22)$$


這代表在一壘有人無人出局(即 (1,0) 狀態)下打擊，包括此次的打擊在內一直到半局結束(三人出局)為止，期望會有 4.178 個人上場打擊。如此同樣的計算與解釋，我們可將每一列的總和整理成表格五。

由表格五我們可知道在每一種狀態下打擊，到半局結束前大致還有幾個人可上場打擊。這結果對教練在不同狀況下換不換代打的決定或多或少會有所幫助。例如：在大聯盟下的國家聯盟，由於投手也必須上場打擊，此規定往往造成教練調度上的兩難。設想五局上落後兩分的隊伍，

表四、基礎矩陣  $W$  之第一列

								
0out	$W_{1,1}=1.036$	$W_{1,2}=0.234$	$W_{1,3}=0.059$	$W_{1,4}=0.004$	$W_{1,5}=0.067$	$W_{1,6}=0.018$	$W_{1,7}=0.016$	$W_{1,8}=0.014$
1out	$W_{1,9}=0.774$	$W_{1,10}=0.293$	$W_{1,11}=0.103$	$W_{1,12}=0.016$	$W_{1,13}=0.119$	$W_{1,14}=0.028$	$W_{1,15}=0.026$	$W_{1,16}=0.040$
2out	$W_{1,17}=0.606$	$W_{1,18}=0.340$	$W_{1,19}=0.140$	$W_{1,20}=0.038$	$W_{1,21}=0.162$	$W_{1,22}=0.054$	$W_{1,23}=0.039$	$W_{1,24}=0.068$

表五、基礎矩陣各列之和，即在各狀態下可上場打擊的席次

								
0out	4.294	4.178	4.382	4.916	4.057	4.293	4.530	3.603
1out	2.911	2.718	3.046	3.386	2.684	2.767	3.171	2.579
2out	1.507	1.519	1.606	1.502	1.537	1.463	1.738	1.434

在 (23,0) 狀態(無人出局二、三壘有人)的局面下恰巧輪到投手的打擊。對方投手不會想去保送這打擊能力不強的投手，而此時的進攻隊伍又無犧牲打的適當性，那教練該不該把這要上場打擊的投手換下場？教練當然想換一個強一點的打者上場，多搶點分數。但未滿五局就換下先發投手，不僅不合大聯盟的作風，最主要的還是後援投手的過早上場會造成往後整個牛棚的沉重負擔。還好有了這表上的結果後，教練可意識到 (23,0) 狀態下還有將近 4.530 個打者可上場。即便上場打擊的投手站著被三振，變成 (23,1) 狀態，也還可以有 3.171 個打者上場。所以別著急，教練還有空間耐住性子靜觀其變，即便許多球迷並不這麼認為，因為球迷不需對球賽後半的投手調度傷神。

## 陸、得分期望值

在上一節中我們已藉由馬可夫過程的理論，讓我們得知在由任何狀態到三出局為止，大致可有幾個打者可上場打擊。但球隊教練更有興趣的是在任何狀態下的

預期得分數，因為此資訊可更直接地幫助教練對下達不同的戰術決策。讓我們回想一下前面所獲得的基礎矩陣  $W$ ，在這個  $24 \times 24$  的矩陣中，任意矩陣元素均代表由某特定局面下開始打擊到半局結束前，此特定局面轉移到各個狀態所可能的出現次數。有了基礎矩陣  $W$ ，我們還得定義另一個  $24 \times 1$  的矩陣 ( $R_{1-step}$ ) 來描述各個狀態下打擊一次可直接攻下的分數期望值。例如在 (0,0) 狀態下打擊，由表格二可知，在它的五種轉移狀態中僅有擊出陽春全壘打可得到一分，而這樣的轉移機率為  $P_{1,1} = 0.023$ 。所以在 (0,0) 狀態下一棒打出可獲得的分數期望值為

$$(R_{1-step})_{1,1} = 1 \times 0.023 + 0 \times (1 - 0.023) = 0.023 \quad (23)$$

我們再看另一個例子：在 (1,2) 狀態下打擊，八個可能出現的結果中，僅有轉移到 (0,2) 狀態時可得兩分，而轉移 (1,2)、(2,2) 與 (3,2) 狀態則各得一分，其餘的轉移均未得分，所以在 (1,2) 狀態下一棒打出可獲得的分數期望值為

$$\begin{aligned}
 (R_{1-step})_{18,1} &= 2 \times P_{18,17} + 1 \times (P_{18,18} + P_{18,19} + P_{18,20}) \\
 &= 2 \times 0.039 + 1 \times (0 + 0.039 + 0.013) \\
 &= 0.130
 \end{aligned}
 \tag{24}$$









如此對每一個狀態下的打擊，計算它一棒可攻下的得分期望值，我們便可架構出一個描述各個狀態下打擊一次可直接攻下的分數期望值矩陣， $(R_{1-step})_{24 \times 1}$ 。同樣地根據 2009 年大聯盟季後賽的記錄，此矩陣的各元素值如表格六所示。

雖然有了此一棒可直接打下分數的矩陣後，但也別急著使用這資訊。畢竟棒球比賽不是在比一個打席的成績，該注意的是半局結束前所得的分數期望值。因此我們還得再定義一個真的有用的矩陣  $(R \cdot P)_{24 \times 1}$ ，其定義為先前兩個矩陣的乘積，即  $(R \cdot P) \equiv WR_{1-step}$ 。此定義寫成矩陣元素的形式為









$$\begin{aligned}
 (R \cdot P)_{i,1} &= \sum_{j=1}^{24} W_{i,j} (R_{1-step})_{j,1} \\
 &= W_{i,1} (R_{1-step})_{1,1} + W_{i,2} (R_{1-step})_{2,1} + \dots + W_{i,24} (R_{1-step})_{24,1} \\
 & i = 1 \sim 24
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

由此數學式我們便可清楚理解  $(WR_{1-step})_{i,1}$  值的意義為：從狀態編號  $i$  下打擊算起到三出局結束為止，轉移到各狀態編號  $j$  的期望次數，乘上在此狀態編號  $j$  下打擊一次可直接攻下的打點期望值。所以 (25) 式中的每一單項乘積為半局結束前由狀態編號  $i$  轉移到狀態編號  $j$  的得分期望值，最後再把所有可能的狀態編號  $j$  加總起來，我們便可獲得在狀態編號  $i$  下打擊算起到半局結束時可能的得分期望值。如此計算每一種起始打擊狀態後可得表格七之結果。

表六、各狀態下一棒可攻下之期望分數

	無人出局	一人出局	二人出局
	$(R_{1-step})_{1,1}=0.023$	$(R_{1-step})_{9,1}=0.035$	$(R_{1-step})_{17,1}=0.039$
	$(R_{1-step})_{2,1}=0.087$	$(R_{1-step})_{10,1}=0.049$	$(R_{1-step})_{18,1}=0.129$
	$(R_{1-step})_{3,1}=0.105$	$(R_{1-step})_{11,1}=0.097$	$(R_{1-step})_{19,1}=0.173$
	$(R_{1-step})_{4,1}=0.667$	$(R_{1-step})_{12,1}=0.786$	$(R_{1-step})_{20,1}=0.167$
	$(R_{1-step})_{5,1}=0.455$	$(R_{1-step})_{13,1}=0.219$	$(R_{1-step})_{21,1}=0.329$
	$(R_{1-step})_{6,1}=0.500$	$(R_{1-step})_{14,1}=0.833$	$(R_{1-step})_{22,1}=0.217$
	$(R_{1-step})_{7,1}=0.625$	$(R_{1-step})_{15,1}=0.667$	$(R_{1-step})_{23,1}=0.273$
	$(R_{1-step})_{8,1}=0.286$	$(R_{1-step})_{16,1}=0.500$	$(R_{1-step})_{24,1}=0.457$

表七、得分能力矩陣

	無人出局	一人出局	二人出局
	$R-P_{1,1}=0.462$	$R-P_{9,1}=0.263$	$R-P_{17,1}=0.126$
	$R-P_{2,1}=0.873$	$R-P_{10,1}=0.431$	$R-P_{18,1}=0.267$
	$R-P_{3,1}=1.004$	$R-P_{11,1}=0.628$	$R-P_{19,1}=0.332$
	$R-P_{4,1}=1.675$	$R-P_{12,1}=1.280$	$R-P_{20,1}=0.280$
	$R-P_{5,1}=1.398$	$R-P_{13,1}=0.759$	$R-P_{21,1}=0.498$
	$R-P_{6,1}=1.679$	$R-P_{14,1}=1.342$	$R-P_{22,1}=0.377$
	$R-P_{7,1}=1.853$	$R-P_{15,1}=1.348$	$R-P_{23,1}=0.533$
	$R-P_{8,1}=1.275$	$R-P_{16,1}=1.114$	$R-P_{24,1}=0.613$

我們稱此  $24 \times 1$  的矩陣 ( $R \cdot P$ ) 為得分能力矩陣(run potential matrix)。由此我們便可很快地藉此得分能力矩陣來粗略評估打擊戰術的恰當與否，而這也是本文中利用馬可夫過程的理論來對棒球決策的兩大應用之一。舉例說明：相信在台灣的老棒球迷都還記得曾紀恩這位台灣棒球的老教頭吧。球場上，他那特有的明亮掌聲，傳達一個早已被人所熟知的戰術密語：在無人出局一壘有人的狀態下，命令打者以犧牲短打來將跑者送到二壘。曾教頭想的是二壘有人一出局後的兩個打席，若有一支安打就有機會得分。相對地，無人出局一壘有人，想要得分，好像要在三個打席中出現兩支

安打才行。乍看之下似乎合理。但有了我們的分析後，可清楚地發現在無人出局一壘有人的狀態下，此局可能得到 0.873 分；而在一出局二壘有人的狀態下的期望得分數為 0.628 分。所以若以狀態下的期望得分數來做為戰術決策的依據，那此犧牲短打並不是明智的決定。然而做一個教練並不是一個簡單的工作，同樣在要與不要執行犧牲短打的決策中，我們還必須考量在不同狀態下的得分機率為何？必竟棒球比賽的勝負只在乎誰的分數比較多，至於輸贏幾分，除了面子外似乎是沒有什麼實質上的差別。當然了，若要把場外賭客間的密謀也考慮進來，那就又是另外的故事。

## 柒、得分機率

如此，除了分析每個狀態下的期望得分數之外，不同狀態下的得分機率也是教練下戰術前必須考量的依據。那我們接下來的挑戰便是來看，如何藉由對馬可夫過程的分析來獲得這得分機率的評估。

過去一般的作法(Albert,2003)，對此得分機率的評估是以狀態轉移矩陣為依據，針對不同的起始狀態直接以電腦來模擬半局的演進。假設模擬一萬次，再看這一萬次的模擬賽中有幾次有得分，如此便可估算此起始狀態下的得分機率。然而如前所提，現今已有許多的數值分析套裝軟體可供我們處理大矩陣的運算，反矩陣的求得已不再是困難的計算。因此在本節中，作者將提出一個新的作法來直接計算各狀態下的得分機率。

由於現在我們只在意得不得分的機率，而不管每個狀態下可得多少分數。又每個狀態下得分與不得分的機率總和必為 1，因此實作上我們可由計算不得分機率下手較為容易。先讓我們回想一下轉移矩陣  $P$  的形式((6)式)，其中次矩陣  $Q$  為扣除掉三出局結束半局後任意狀態間的轉移機率。又我們於附錄一中已給出所有狀態轉移間的得分數，其中有些轉移可得到分數，有些則無。由於我們想計算的是不得分的機率，因此我們將這些可得分的轉移，無論其發生機率是多少，我們均將其發生機率設定為零。如此經過處理後的次矩陣  $Q$ ，

我們便稱它為變型轉移矩陣(modified transition matrix)，以  $\bar{Q}$  表之。此外每一局又以三出局為結束，所以每一狀態轉移到此結束狀態之機率，可由轉移矩陣  $P$  中的次矩陣  $R$  來描述。當然在轉移到此結束狀態之前，比賽是可無限地延續下去，因此每個狀態下不得分的機率便為：

$$\begin{aligned} & R + \bar{Q}R + \bar{Q}^2R + \bar{Q}^3R + \dots \\ &= (I + \bar{Q} + \bar{Q}^2 + \bar{Q}^3 + \dots)R \quad (26) \\ &= (I - \bar{Q})^{-1}R \end{aligned}$$









式中  $I$  為  $24 \times 24$  的單位矩陣，同時我們也有運用到類似(18)~(20)式的計算。由於  $R$  為  $24 \times 1$  的矩陣，(26)式的結果也會是一個  $24 \times 1$  的矩陣。對(26)式的理解，我們可知式中的第一項為此半局結束前最後一次打擊的機率；而第二項為打擊兩次後此局結束的機率，且在此兩次打擊中均無得分；後面各項可依此類推。當然在(26)式中所包含進來的打擊結果均沒有替球隊攻下分數。相反地，任意狀態下的得分機率也可由(26)式反推得到

$$(R - \text{Prob})_{24 \times 1} = 1 - (I - \bar{Q})^{-1}R \quad (27)$$

必須提醒的是，(27)式中等號右邊的矩陣  $1$  為所有元素均等於 1 的  $24 \times 1$  矩陣。同樣地，我們根據 2009 年大聯盟季後賽的記錄與(27)式來計算各狀態下的得分機率，其結果如表格八所示。



表八、得分機率矩陣

	無人出局	一人出局	二人出局
	R-Prob <sub>1,1</sub> =0.262	R-Prob <sub>9,1</sub> =0.168	R-Prob <sub>17,1</sub> =0.087
	R-Prob <sub>2,1</sub> =0.423	R-Prob <sub>10,1</sub> =0.231	R-Prob <sub>18,1</sub> =0.152
	R-Prob <sub>3,1</sub> =0.550	R-Prob <sub>11,1</sub> =0.373	R-Prob <sub>19,1</sub> =0.217
	R-Prob <sub>4,1</sub> =0.952	R-Prob <sub>12,1</sub> =0.856	R-Prob <sub>20,1</sub> =0.203
	R-Prob <sub>5,1</sub> =0.623	R-Prob <sub>13,1</sub> =0.375	R-Prob <sub>21,1</sub> =0.261
	R-Prob <sub>6,1</sub> =0.851	R-Prob <sub>14,1</sub> =0.774	R-Prob <sub>22,1</sub> =0.211
	R-Prob <sub>7,1</sub> =0.798	R-Prob <sub>15,1</sub> =0.697	R-Prob <sub>23,1</sub> =0.273
	R-Prob <sub>8,1</sub> =0.593	R-Prob <sub>16,1</sub> =0.539	R-Prob <sub>24,1</sub> =0.286

由此結果我們獲知在無人出局一壘有人的狀態下之得分機率為 0.423。若打者成功地執行教練所下達的犧牲短打戰術，將跑者成功地推進到二壘，形成一出局二壘有人的狀態，我們的結果卻顯示這個戰術反把球隊的得分機率降到 0.373。合併上節的結果，在無人出局一壘有人的狀態下，無論是得分期望值或是得分機率這兩個戰術評量指標均優於一人出局二壘有人的狀態。那棒球場上無人出局一壘有人的狀態下，我們所熟悉的犧牲戰術，教練對此戰術的決定是否恰當就值得商榷了。

在此我們並不是說犧牲短打的戰術都不好，就讓我們再看另外一個例子：無

人出局一、二壘有人的狀態，根據我們的分析此狀態下之得分期望值與得分機率分別為 1.398 與 0.623。而在短打推進後，場面變為一出局二、三壘有人，此時的得分期望值與得分機率則分別變為 1.348 與 0.697。雖然這兩組參考數據的差異不像前面例子中的數據差異明顯，但根據我們的分析還是可得到這樣的建議：球隊若須要多得點分數，那就別下犧牲短打策略；但假若球隊只急迫想打下一分，那基於得分機率的考量教練不妨下達犧牲推進的戰術。

最後，須要提醒讀者的是本文用來分析的數據，僅是採用 2009 年大聯盟季後賽

的三十場比賽記錄。當然我們這裡所討論的是一個機率的問題，那球隊教練是要根據理性分析的調兵遣將，或是直覺的判斷，這就要看教練的處事哲學了。

## 捌、結論

馬可夫過程已廣泛地應用到各個領域的研究中，也因此讓這理論的觸角在不知不覺中伸進大學各個學院的課程之中。然而，學生對此應用極廣的數學理論，其接受程度往往受礙於數學理論的抽象陳述，而失去對理論的核心認識與實際應用的能力。因此在本文中，作者參照美國學府常使用的教學題材，引入棒球比賽的策略判斷來教授馬可夫過程。一方面，在台灣，棒球也是國人所愛好的運動，如此不但可增加學生對馬可夫過程的學習興趣；更重要的也是由於大部分學生對棒球的熟悉度，使他們在利用馬可夫過程分析球賽時，較容易提出新的疑問，進一步發展成新的研究題目，如此達到活化理論的教學目的。就像作者在此論文中所採用分析的數據，其結果對犧牲短打的推論，是否可套用在我們國內的棒球賽中，就是值得學生發展的問題。

當然除了教學目的之外，現今將棒球視為一馬可夫過程的研究工作仍舊是一個熱門的議題。舉凡球隊打擊棒次的安排，到打者對投手球路的猜測模型等等，都需對此棒球之馬可夫模型做上不同程度的變化，使之更符合真實的棒球比賽與所要探討的問題。而在進入這些更複雜的棒球議

題之前，本文作者僅就基本的馬可夫過程理論介紹一個最單純的棒球之馬可夫模型。期使學生在較少的複雜度下，能夠理解馬可夫過程的理論與應用，這也是本文章的最大目的。

## 謝誌

感謝國科會 NSC100-2515-S-156-001 研究計畫補助，使本研究得以順利完成。

## 參考文獻

- 大聯盟官方網站, <http://mlb.mlb.com>  
林珮琄、賴尚毅、黃俊霖、趙約昇 (2007), 馬可夫鍵於職業棒球棒次決策之應用, *北體學報*, (15), 1~12。  
Albert, J.(2003). **Teaching Statistics Using Baseball**, The Mathematical Association of America (Incorporated).  
Bellman, R. (1977). *Dynamic Programming and Markovian Decision Processes, with Application to Baseball*, Optimal Strategies in Sports, S.P.Ladany and R.E.Macool (Eds.). Elsevier-North Holland, New York.75-85  
Bukiet, B., Harold, E.R. and Palacios, J.(1997). A Markov Chain Approach to Baseball, *Operations Research*, 45, 14-23  
Cook, E.(1966). *Percentage Baseball*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass.  
Howard, R.A.(1960). *Dynamic Programming and Markov Processes*. M.I.T. Technology Press and Wiley, Cambridge, Mass. 49-54.  
Lindsey, G.R. (1963). An Investigation of Strategies in Baseball, *Operations Research*, 11, 477-501.  
Sokol, J.S.(2004). An Intuitive Markov Chain Lesson From Baseball, *INFORMS Transactions on Education* 5:1. 47-55.  
Trueman, R.E. (1977). Analysis of Baseball as a Markov Process. Optimal Strategies in Sports, S.P.Ladany and R.E.Macool (Eds.), Elsevier-North Holland, New York.68-77

附錄一 狀態轉移得分表

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(12,0)	(13,0)	(23,0)	(123,0)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(12,1)	(13,1)	(23,1)	(123,1)	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(12,2)	(13,2)	(23,2)	(123,2)	(X,3)
1	0	1	0	0	0				0																
2	0	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0					0								
3	0	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0					0								
4	0	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0					0								
5	0	3	2	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0					0
6	0	3	2	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0					0
7	0	3	2	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0					0
8	0	4	3	3	3	2	2	2	1	3	2	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0	0
9	0								1	0	0	0					0								0
10	0								2	1	1	1	0	0	0		1	0	0	0					0
11	0								2	1	1	1	0	0	0		1	0	0	0					0
12	0								2	1	1	1	0	0	0		1	0	0	0					0
13	0								3	2	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0		0
14	0								3	2	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0		0
15	0								3	2	2	2	1	1	1	0	2	1	1	1	0	0	0		0
16	0								4	3	3	3	2	2	2	1	3	2	2	2	1	1	1	0	0
17	0																1	0	0	0					0
18	0																2	1	1	1	0	0	0		0
19	0																2	1	1	1	0	0	0		0
20	0																2	1	1	1	0	0	0		0
21	0																3	2	2	2	1	1	1	0	0
22	0																3	2	2	2	1	1	1	0	0
23	0																3	2	2	2	1	1	1	0	0
24	0																4	3	3	3	2	2	2	1	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

同轉移矩陣之排列，橫列(row)所對應的為起始狀態，縱行(column)所對應的為轉移後的狀態。格子中的數字則為此轉移所得的分數，而灰色底部分則為不可能發生之狀態轉移。

附錄二 狀態轉移矩陣

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(12,0)	(13,0)	(23,0)	(123,0)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(12,1)	(13,1)	(23,1)	(123,1)	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(12,2)	(13,2)	(23,2)	(123,2)	(X,3)
1																									
2																									
3																									
4																									
5																									
6																									
7																									
8																									
9																									
10																									
11																									
12																									
13																									
14																									
15																									
16																									
17																									
18																									
19																									
20																									
21																									
22																									
23																									
24																									
25																									

$(A_0)_{8 \times 8}$

$(B_0)_{8 \times 8}$

$(C_0)_{8 \times 8}$

$(D_0)_{8 \times 1}$

$O_{8 \times 8}$

$(A_1)_{8 \times 8}$

$(B_1)_{8 \times 8}$

$(E_1)_{8 \times 1}$

$O_{8 \times 8}$

$O_{8 \times 8}$

$(A_2)_{8 \times 8}$

$(F_2)_{8 \times 1}$



雖然在 (7) 式中，我們已將狀態轉移矩陣(6 式)中的  $Q$  矩陣分為九個  $8 \times 8$  的次矩陣。但根據棒球規則，在每一個次矩陣中還是有些矩陣元素必定為零。例如元素  $(A_0)_{1,5}$  所代表的是由無人出局無人在壘轉移到無人出局一二壘有人的機率，而在棒球場上這樣的轉移絕對不會發生，所以其值必為零。諸如此類轉移機率必定為零的元素，在上圖中我們便以灰色底來做區別。

2009 年大聯盟季後賽之轉移矩陣

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(12,0)	(13,0)	(21,0)	(22,0)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(12,1)	(13,1)	(21,1)	(22,1)	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(12,2)	(13,2)	(21,2)	(22,2)	(0,3)
1 (0,0)	0.023	0.220	0.046	0.002					0.709																
2 (1,0)	0.026	0	0.035	0	0.243	0.026	0.052		0	0.339	0.157	0					0.122								
3 (2,0)	0	0.026	0.026	0.026	0.079	0.132	0		0.026	0.198	0.421	0.105					0								
4 (3,0)	0	0.667	0	0	0	0	0		0	0	0	0.333					0								
5 (12,0)	0.091	0	0	0	0.030	0.061	0.030	0.061	0	0.030	0.030	0	0.303	0.091	0.152		0	0	0	0.121					0
6 (13,0)	0	0	0	0	0.200	0	0.100	0.200	0	0.100	0	0	0.300	0	0		0.100	0	0	0					0
7 (21,0)	0	0.125	0.125	0	0	0	0	0.125	0	0	0	0.125	0	0	0.500		0	0	0	0					0
8 (22,0)	0	0	0	0	0	0	0	0.286	0	0	0	0	0	0	0	0.429	0	0	0	0	0.143	0	0.143		0
9 (0,1)									0.035	0.241	0.032	0.007					0.685								0
10 (1,1)									0.021	0	0.007	0	0.201	0.014	0.014		0	0.563	0.097	0					0.083
11 (2,1)									0	0.069	0.028	0	0.250	0.083	0.014		0	0.028	0.403	0.083					0.042
12 (3,1)									0.071	0.286	0.143	0	0	0.143	0		0.214	0	0.071	0.071					0
13 (12,1)									0	0	0.063	0	0.063	0	0.016	0.125	0	0	0	0.016	0.406	0.094	0.094		0.125
14 (13,1)									0.056	0	0	0.056	0.111	0	0	0.111	0	0.278	0.167	0	0	0.222	0		0
15 (21,1)									0.067	0.067	0	0	0	0.067	0	0.333	0	0	0.067	0.200	0	0.067	0.133		0
16 (22,1)									0	0	0	0	0.091	0	0	0.182	0	0	0	0	0.045	0.045	0.045	0.455	0.136
17 (0,2)																	0.039	0.232	0.054	0.006					0.689
18 (1,2)																	0.039	0	0.039	0.013	0.161	0.052	0.032		0.655
19 (2,2)																	0.020	0.102	0.020	0.010	0.224	0.020	0		0.632
20 (3,2)																	0	0.167	0	0	0.042	0.125	0		0.687
21 (12,2)																	0.012	0	0.059	0.024	0.071	0.035	0.024	0.129	0.687
22 (13,2)																	0	0	0.043	0	0.007	0	0.043	0.130	0.686
23 (21,2)																	0	0.091	0	0	0	0.045	0.045	0.318	0.500
24 (22,2)																	0	0	0.029	0	0.086	0	0.029	0.143	0.714
25 (0,3)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

附錄三 2009 年大聯盟季後賽之基礎矩陣

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(3,0)	(12,0)	(13,0)	(21,0)	(22,0)	(0,1)	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(12,1)	(13,1)	(21,1)	(22,1)	(0,2)	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(12,2)	(13,2)	(21,2)	(22,2)
1 (0,0)	1.036	0.234	0.059	0.004	0.067	0.018	0.016	0.014	0.774	0.293	0.103	0.016	0.119	0.028	0.026	0.04	0.606	0.34	0.14	0.038	0.162	0.054	0.039	0.068
2 (1,0)	0.052	1.022	0.048	0.001	0.27	0.049	0.066	0.048	0.06	0.408	0.218	0.018	0.252	0.072	0.087	0.109	0.203	0.344	0.198	0.087	0.256	0.095	0.076	0.139
3 (2,0)	0.013	0.052	1.032	0.027	0.127	0.145	0.021	0.055	0.063	0.287	0.499	0.127	0.26	0.122	0.045	0.103	0.117	0.29	0.31	0.093	0.279	0.105	0.071	0.139
4 (3,0)	0.035	0.682	0.032	1.001	0.18	0.033	0.044	0.032	0.071	0.379	0.2	0.348	0.214	0.102	0.061	0.088	0.239	0.346	0.216	0.093	0.239	0.096	0.064	0.121
5 (12,0)	0.099	0.027	0.011	5E-04	1.052	0.066	0.04	0.115	0.097	0.095	0.075	0.015	0.418	0.138	0.189	0.22	0.096	0.171	0.122	0.199	0.314	0.144	0.122	0.231
6 (13,0)	0.021	0.019	0.016	4E-04	0.215	1.016	0.109	0.322	0.047	0.147	0.036	0.035	0.178	0.341	0.093	0.28	0.166	0.254	0.145	0.065	0.261	0.15	0.121	0.256
7 (21,0)	0.008	0.134	0.135	0.004	0.05	0.024	1.011	0.188	0.065	0.171	0.115	0.147	0.126	0.079	0.519	0.34	0.113	0.202	0.165	0.142	0.22	0.126	0.156	0.29
8 (123,0)	0	0	0	0	0	0	0	1.4	1E-04	5E-04	0.005	3E-05	0.074	5E-04	0.001	0.746	0.007	0.034	0.045	0.011	0.36	0.07	0.283	0.566
9 (0,1)									1.043	0.257	0.042	0.008	0.069	0.009	0.005	0.014	0.763	0.342	0.111	0.019	0.125	0.037	0.026	0.041
10 (1,1)									0.024	1.009	0.023	0.001	0.229	0.017	0.018	0.045	0.049	0.611	0.163	0.026	0.265	0.079	0.061	0.098
11 (2,1)									0.009	0.077	1.051	0.005	0.314	0.09	0.021	0.069	0.029	0.179	0.493	0.112	0.316	0.101	0.059	0.121
12 (3,1)									0.091	0.323	0.163	1.01	0.136	0.163	0.009	0.047	0.312	0.35	0.251	0.103	0.205	0.097	0.041	0.085
13 (12,1)									0.002	0.007	0.072	4E-04	1.106	0.007	0.019	0.178	0.012	0.04	0.083	0.042	0.599	0.15	0.15	0.257
14 (13,1)									0.064	0.033	0.02	0.057	0.148	1.011	0.003	0.161	0.08	0.352	0.239	0.022	0.236	0.282	0.059	0.186
15 (21,1)									0.076	0.087	0.008	0.004	0.071	0.07	1.002	0.428	0.066	0.15	0.13	0.21	0.166	0.16	0.194	0.349
16 (123,1)									2E-04	8E-04	0.008	5E-05	0.123	8E-04	0.002	1.242	0.004	0.017	0.042	0.009	0.204	0.082	0.103	0.741
17 (0,2)																	1.053	0.255	0.073	0.012	0.066	0.019	0.012	0.017
18 (1,2)																	0.045	1.024	0.06	0.019	0.204	0.066	0.044	0.057
19 (2,2)																	0.03	0.118	1.047	0.019	0.283	0.04	0.015	0.054
20 (3,2)																	0.009	0.173	0.021	1.005	0.097	0.139	0.016	0.042
21 (12,2)																	0.016	0.02	0.077	0.028	1.122	0.047	0.037	0.19
22 (13,2)																	0.003	0.012	0.038	0.004	1.129	1.008	0.055	0.193
23 (21,2)																	0.005	0.101	0.023	0.003	0.067	0.057	1.067	0.415
24 (123,2)																	0.003	0.009	0.044	0.004	1.124	0.008	0.04	1.202