

談幾何扣條在國中數學 「平行」與「四邊形」單元的應用

李祐宗

澎湖縣立湖西國民中學

壹、前言

筆者曾發表過幾何扣條在中小學教學上的應用，該篇文章主要針對學生在學三角形時如何利用扣條來做學習。以國中數學來說，三角形的單元大部分都會出現在國中八年級上、下學期，而國中八年級下學期緊接在三角形單元後的是平行與四邊形的幾何問題，沒想到扣條這簡單又好用的教具居然可以再度派上用場。算一算整個國中數學有六分之一以上的數學課都可以利用扣條做教學，因此筆者再介紹扣條在平行與四邊形單元的應用。

在此之前為方便讀者理解，筆者將市售扣條的長度表列出如表 1。

貳、教學主題一平行四邊形

【配合單元：國中平行四邊形單元】

筆者建議在實施此單元教學時，先將平行四邊形的理論講解清楚，讓學生明白平行四邊形的四個邊長組合必須擁有什麼樣的條件，例如只要兩組對邊等長或一組對邊等長且互相平行，就一定可以構成平行四邊形；反之，只要是平行四邊形，一定會有兩組對邊等長且互相平行的線段。扣條在此扮演的角色是實物操作、預測結果與定理驗證。因此在教師講解相關理論完畢後，可以逐次問學生以下問題：

表 1、扣條長度分析表

顏色	橘	紫	綠	黃	藍	紅
大扣條長度 (cm)	10	14.14	17.32	20	24.48	28.28
小扣條長度 (cm)	5	7.07	8.66	10	12.24	14.14
大扣條除以 小扣條之比例	2	2	2	2	2	2
大扣條長度分析	10	$10 \times \sqrt{2}$	$10 \times \sqrt{3}$	10×2	$10 \times \sqrt{6}$	$20 \times \sqrt{2}$
各扣條長度的比	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$
顏色代號	1	2	3	4	5	6

一、四種不同顏色的扣條可否組成平行四邊形？參考答案：不行。教師再問：為何不行？學生答：因為沒有一對顏色相同的扣條（相同顏色的扣條長度相等）。

二、三種不同顏色的扣條可否組成平行四邊形？此時學生拿起扣條操作一番，最後答案是：不行。教師接著問：為何不行？學生答：因為三種顏色四根扣條當中，必定只有一對顏色相同的扣條，所以仍不足以拼出平行四邊形。

三、二種不同顏色的扣條可否組成平行四邊形？大部分學生回答：可以。教師問：為何可以？學生答：因為會有兩對顏色一樣的扣條，所以可以組成平行四邊形。教師再問：您確定真的可以嗎？有沒有例外的情況？此時有學生想到否定的答案，理由是二種不同顏色的扣條有可能是黃色的三根加上綠色的一根，如此便無法拼出平行四邊形。還有，若是相同顏色的扣條互為鄰邊的組合為箏形（圖 3）。此部分學生在回答此問題時很容易掉入陷阱，沒關係，經過一連串的你問我答觀念釐清之後，教師再發放扣條給學生，並請學生象徵性的排出幾種平行四邊形出來（圖 1 及圖 2）。

四、同一種顏色的扣條可否組成平行四邊形？學生答：可以。教師再問：為何？學生答：因為滿足兩組對邊等長的條件。其實，四條等長的扣條拼出來的

不只是平行四邊形，也是菱形，所以菱形是平行四邊形的一種。

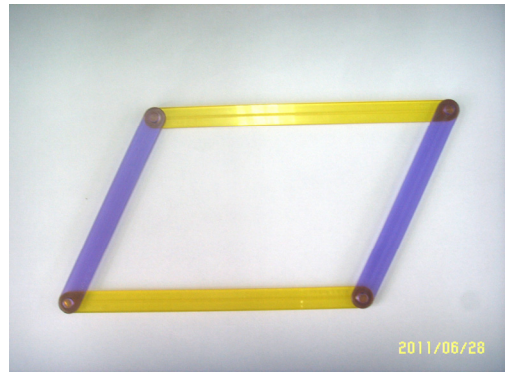


圖 1、平行四邊形 1



圖 2、平行四邊形 2

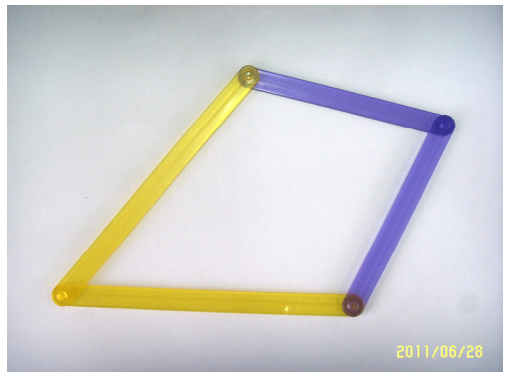


圖 3、箏形

接著，爲了擴大問題的討論層面，筆者設計簡單的一道問題讓每位學生作答，此問題是：六種不同長度的扣條總共可以拼出多少種平行四邊形？筆者列舉幾位學生的答案如圖 4。

此題正確答案一共有 21 種，且筆者在批改此道題目時，發現多數同學答案的寫法出現如上圖紅色框的形式。於是在某堂課我將幾位同學的答案秀給班上所有同學觀摩，並討論此種答案有何特殊之處，學生在思考之餘提出，此種圖形類似等差數列的排法，從左至右依序是 6、5、4、3、2、1，六個數字加總共 21，就是此題的答

案。此時筆者乘勝追擊，再問學生：10 種不同長度的扣條可以組成幾種平行四邊形，有精明的學生就開始推測答案是 $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55$ 種，若以排列組合的方式討論此題，六種不同長度的扣條共有 $C(6, 1) + C(6, 2) = 6 + 6 \times 5 \div 2 = 21$ 種；十種不同長度的扣條則有 $C(10, 1) + C(10, 2) = 10 + 10 \times 9 \div 2 = 55$ 種。依此類推， n 條不同長度的扣條共有 $C(n, 1) + C(n, 2) = n + n \times (n - 1) \div 2 = n \times (n + 1) \div 2 = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ 。真沒想到平行四邊形的問題竟可以與等差數列扯上關係！

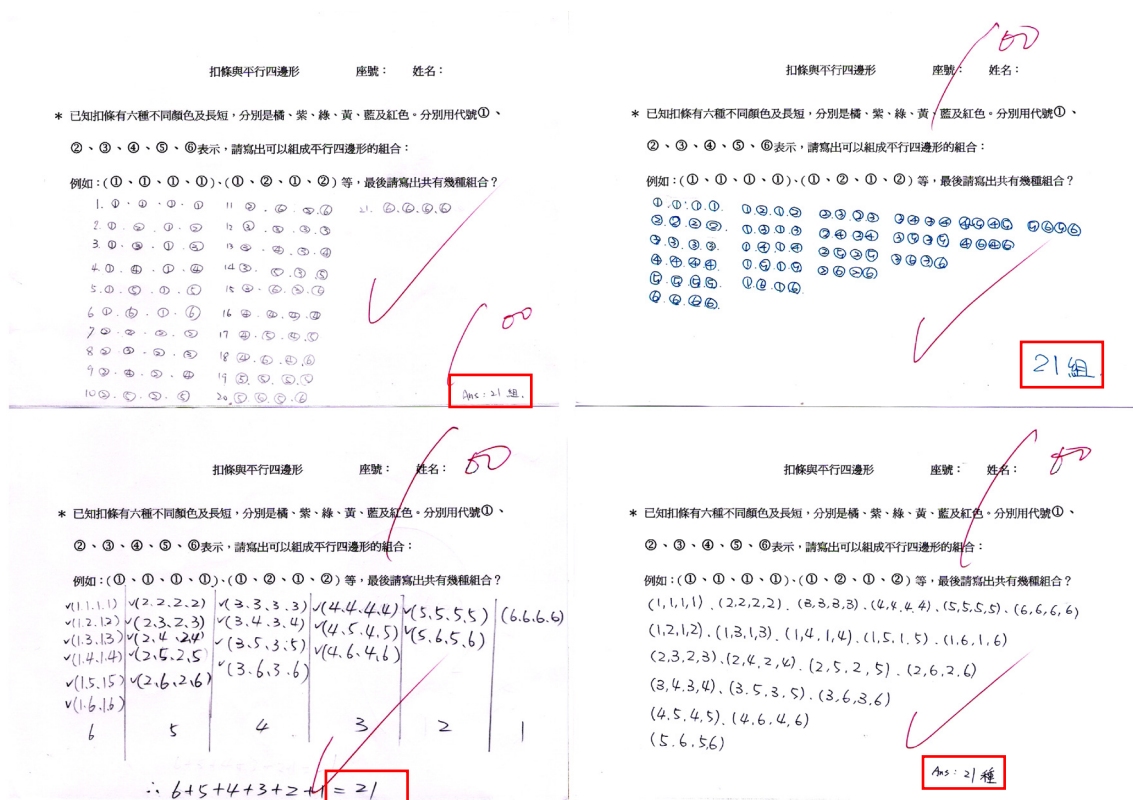


圖 4、學生答案參考

參、教學主題—梯形

【配合單元：國中梯形單元】

往往大部分教師都是將扣條應用在三角形之上，當筆者將之納入梯形的教學時，才發現扣條在梯形問題上扮演的角色有多重要，因此筆者非常建議教師可以參考。

按照梯形的定義，是指四邊形中只有一組對邊互相平行，另一組對邊不平行。由此可知平行四邊形與梯形是互不相干的，平行四邊形並不是梯形的一種；梯形更不可能是平行四邊形的一種。所以第一：四種同色的扣條不可能排出梯形，因為拼出來一定是平行四邊形，而非梯形；第二：三種不同長度的扣條可否拼出梯形？此種問題若光用腦袋憑空想像也很難得到答案，若有扣條可操作，加上平行四邊形的不穩定原理，可以得到梯形如圖 5、圖 6。

此處有何值得討論之處？三種顏色扣條中必有一組扣條長度相等（如圖中黃色扣條），那麼排列順序是否影響梯形的形成？以下分三點討論：

（一）兩黃色扣條擺對邊並平行可否組成梯形？

此答案是否定的，如果一組等長扣條擺對邊，則形成了一組對邊等長且平行的平行四邊形而非梯形。

（二）兩黃色扣條擺對邊並不平行可否組成梯形？

可組成等腰梯形如圖 6。由於綠色與紅色扣條是不同的長度，所以組成一

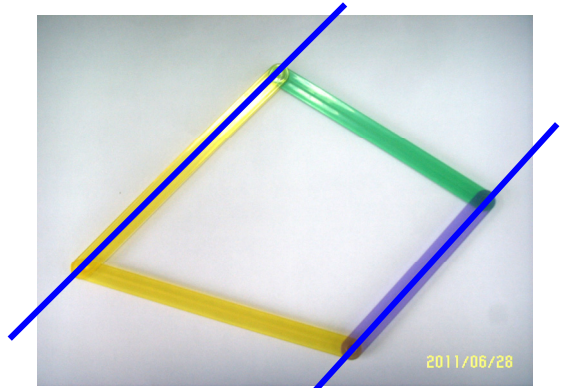


圖 5、可調整為梯形



圖 6、等腰梯形

個等腰梯形。但是如何證明這是等腰梯形？請讀者自行證明之。

（三）兩黃色扣條擺鄰邊可否組成梯形？

可組成梯形如圖 5。那麼如何證明這樣的組合可以調整成梯形？我們先從圖 7 的菱形說起，如圖 ABCD 是一個菱形，菱形是平行四邊形的一種，現在這個菱形即將要變成梯形。首先保持 \overline{AB} 及 \overline{BC} 不動，將 D 點左移至 E 點如圖 8。

由於 $\angle a > \angle c$ ，所以 $\overline{CE} > \overline{AE}$ ，也就是 $\overline{CE} \neq \overline{AE} \neq \overline{AB} = \overline{BC}$ ，符合本題的要求。除此外，讀者可以繼續研究，若給定任意三種長度四條線段，是否一定可以組成梯形？

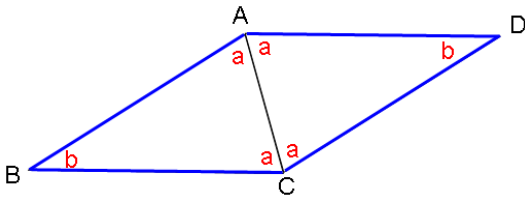


圖 7、菱形 ABCD

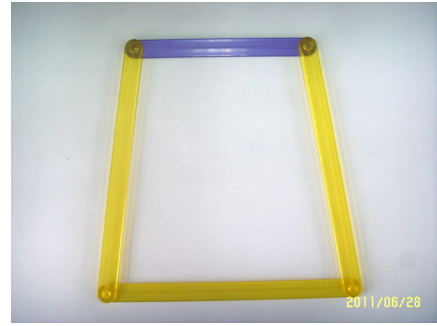


圖 9、等腰梯形

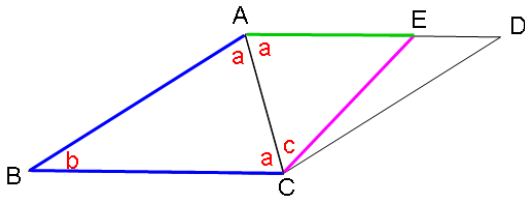


圖 8、菱形變成梯形

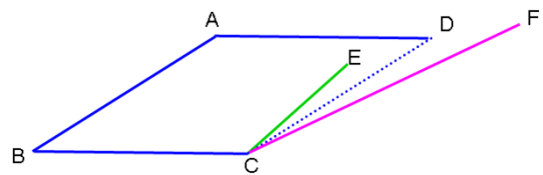


圖 10、無法排出梯形

第三：二種不同長度的扣條可否拼出梯形？這種情形我們可以分兩種情況來討論：

(一) 三條等長線段加另一條線段的組合：

三條等長線段加另一條線段的組合：此種組合的排列方式只有一種，就是連續三條等長線段組合後再外接第四條線段。

若第四條線段(圖 9 的紫色扣條)當梯形的上底或下底則可排出等腰梯形(如圖 9)；若非如此則無法排出梯形，理由是三條等長線段中若有一組當梯形的上下底，則第四條線段的長度也非得等於原來那三條不可(圖 10 的 \overline{CD})，如此一來變成為平行四邊形而非梯形了。

(二) 兩組等長線段的組合：

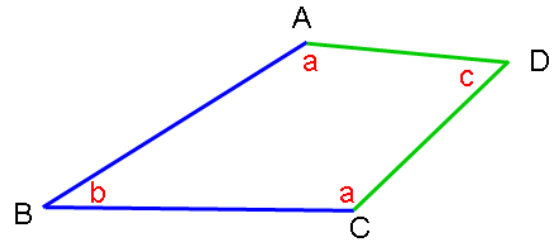


圖 11、菱形非梯形的一種

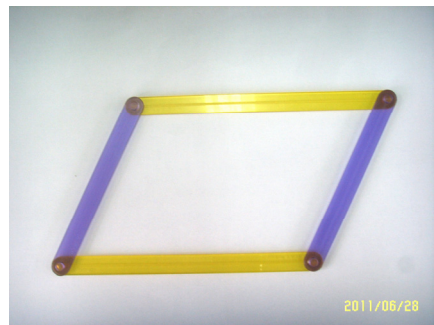


圖 12、平行四邊形非梯形

排列方式有兩種，第一種會組成箏形，那麼箏形可否是梯形呢？假設令 $\angle a + \angle b = 180$ ，則 \overline{AD} 平行 \overline{BC} ； \overline{AB} 也平行 \overline{CD} ，會成為平行四邊形（此種情況下箏形也會變成菱形）而非梯形。若是排成如圖十二也不可，因為兩雙對邊等長的線段會組成平行四邊形。

第四：四種不同長度的扣條可否拼出梯形？此種狀況更為精采，倘若教學現場沒有道具可供學生操作的話學習者會更難想像。筆者在請學生操作之前先做預測此種狀況可否拼出梯形來，有些同學說可以，有些則說不可以。待扣條一到手把玩幾下後，發現梯形的出現：

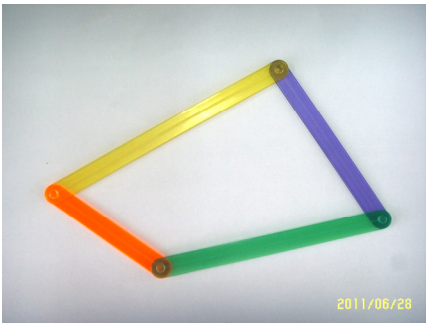


圖 13、四種不同長度的扣條組合
(有學生一開始以為不可以排出梯形)



圖 14、將圖十三調整成梯形



圖 15、加上方格板可調整的更加精確

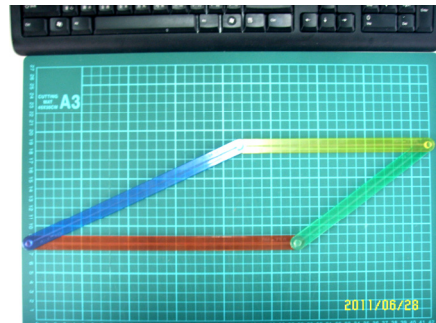


圖 16、另一組梯形

操作過程中發現即便學生有扣條在手上，一開始還以為無法排出梯形（如圖 13），在教師或同儕的引導下才調整出梯形，如圖 14。此過程若有適當的方格紙（板）更可用來驗證排出來的梯形（圖 15、16）。

肆、教學主題一等腰三角形

【配合單元：國中三角形及平行單元】

等腰三角形的兩底角相等是很常見且重要的定理，若利用伸縮扣條（圖中藍色、黃色扣條為伸縮扣條）搭配一般扣條（圖中底邊黃色扣條），再加上量角器便可輕鬆完成等腰三角形的模型。此模型可藉由改變三角形的邊長，再量出兩底角是否相等來得到驗證。

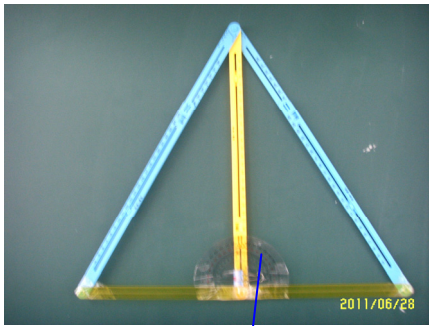


圖 17、等腰三角形模型

此量角器的作用是當調整三角形過程中，保持三角形的高（黃色伸縮扣條）始終垂直三角形的底邊。



圖 18、調整扣條的邊長使之成為不同的等腰三角形

參考文獻

- 國家教育研究院籌備處主編（2011）：國民中學第四冊。台南市：部編。P.97~P.120。
- 李祐宗（2011）：創意教學示例—幾何扣條的遊戲。科學研習月刊，第 50 卷 5 期，P.38~P.47。