探索數學規律實作評量舉例

吳柏萱[1] 朱啟台[2]* 陳瑋伯[3] 曾政清[4] 李吉彬[5] 陳昭地[3]

[1]國家教育研究院

[2]教育部 高中數學學科中心

[3]國立臺灣師範大學 數學系所

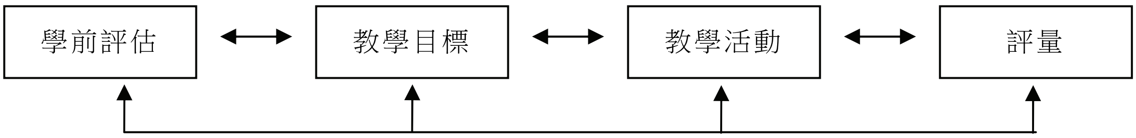
[4]臺北市立建國高級中學

[5]國立臺中第一高級中學

壹、前言

評量([1])是使用科學的方法與技術，蒐集有關學生學習行為及其成就的可靠資料，依據預先擬定的教學目標，就學生學習表現情形，加以分析、研究與評估等動態過程。在教學流程中(如下表 1)，具有承接轉合的關鍵性角色與回饋的功能。

表 1、教學流程表



評量依時機可分成診斷性評量、形成性評量與總結性評量，與評量相關的術語有：高分組、低分組、難易度、鑑別度、五標(頂標、前標、均標、後標、底標)等。至於評量的方式則有：口頭問答、上台板演、紙筆測驗、實作評量等；本文著重於數學科總結性評量的紙筆測驗，而依現今常用的測驗題型有單選題、多選題、選填題及非選擇題(計算證明題)，各有其命題技術，均非易事，但肯定是數學科教師急切瞭解，甚至希望儘快達到精熟的地步。尤其限於特殊選才目的(含數學科教師甄選)無疑地適切的口試題很適合使用操作型實作評量，即使段考或大考的非選擇題題型，設計成一個簡潔新穎的操作型實作評量試題，也是能夠被接受的良好典型試題。底下依 1980 年代 Maryland 州發展的實作評量測驗([2])，給出操作型實作評量定義：

> 它是一種評量的方式。就適當的數學主題，針對形成該主題的主要數學概念，配合周遭的情境，使用適切的工具或描述，從事一系列的操作，以完成評量核心目標或相關目標。

*為本文通訊作者

接著仿照 Maryland 州所發展提供八年級國中生 $n\times n\times n$ 正方體積木，表面著色拆開成 n^3 個小立方塊，找出各面著色數的個數之規律，設計一個 $m\times n\times l$ 長方體積木的推廣性並適用於一般程度高一學生的數學科操作型的實作評量例題，並引用臺灣師範大學附屬高級中學第一屆科學班數學科資格考一道矩陣考題，設計成找出方陣乘方的規律性實作題，最後改編兩道高一上數學段考試題及 100 年指考數學甲一道微積分的選填題 C 為實作評量題。事實上一般的數學科多選題已具備操作型實作評量的雛型，可輕易地改編成符合於原測驗目標的新穎實作評量題，而選填題或計算證明題，也多能經過審慎研究原測驗目標後，發展成針對施測對象匹配原測驗目標之實作評量題。

貳、作業壹：探索數學規律

先備知識：1. $n^3=(n-2)^3+6(n-2)^2+12(n-2)+8$

2. $mnl=(m-2)(n-2)(l-2)$

$+2[(n-2)(m-2)+(n-2)(l-2)+(m-2)(l-2)]$

$+4[(m-2)+(n-2)+(l-2)]$

$+8$

實施時間：高一上第一次定期考後

探索數學規律活動一

小方塊是一種立方體的小積木，一般人很喜歡拿小方塊來堆疊成各種立體圖形。現在請你從小方塊堆疊出的立體圖形中，探索一些數學規律。（我們可將小方塊的邊長當作 1）

步驟 1.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $2\times2\times2$ 的正方體，並假想在正方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 1)，並完成小方塊個數之表格(表 2)。

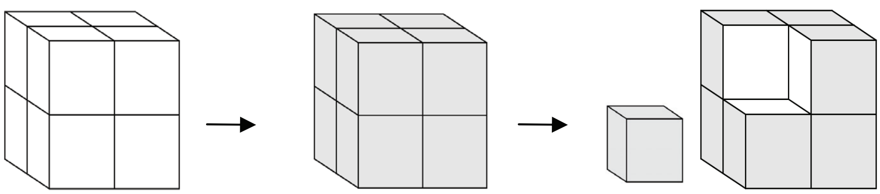


圖 1、拆開後的 $2\times2\times2$ 正方體

表 2、小方塊個數

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	0	0	0	8

步驟 2.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $2\times2\times3$的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 2)，並完成小方塊個數之表格(表 3)。

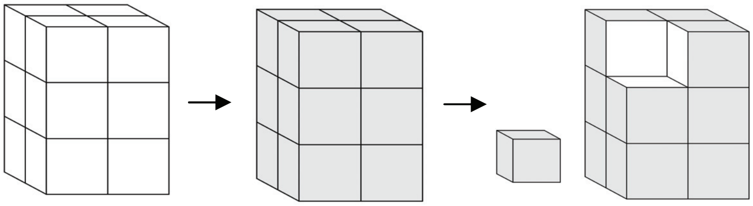


圖 2、拆開後的 $2\times2\times3$ 長方體

表 3、小方塊個數

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	4	0	0	12

步驟 3.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $2\times2\times4$ 的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 3)，並完成小方塊個數之表格(表 4)。

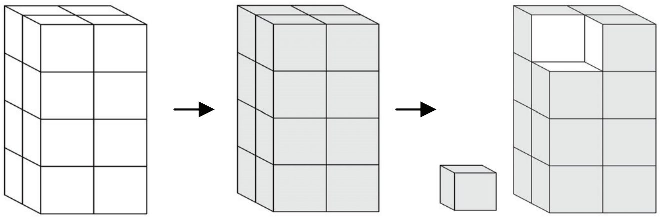


圖 3、拆開後的 $2\times2\times4$ 長方體

表 4、小方塊個數

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	8	0	0	16

步驟 4.

請你整理前面各活動的資料完成小方塊個數之整理表格(表 5)，並找尋一些數學規律，以預測堆成邊長為 $2\times2\times5$的長方體(如圖 4)塗油漆後再拆開的情形。

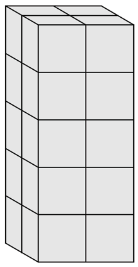


圖 4、邊長為 $2\times2\times5$的長方體

表 5、小方塊個數整理表格

	小方塊個數	3 個面被塗色的小方塊個數	2 個面被塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times2\times2$的正方體	8	8	0
邊長為 $2\times2\times3$的長方體	12	8	4
邊長為 $2\times2\times4$的長方體	16	8	8
邊長為 $2\times2\times5$的長方體	20	8	12

邊長為 $2\times2\times5$的長方體中，有 2 個面被塗色的小方塊個數是多少？12 個。

請問你找出來的規律是什麼？每多一層就多出 4 個。

請繼續完成小方塊個數之整理表格(表 6)。

表 6、小方塊個數整理表格

	1 個面被塗色的小方塊個數	未塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times2\times2$的正方體	0	0
邊長為 $2\times2\times3$的長方體	0	0
邊長為 $2\times2\times4$的長方體	0	0
邊長為 $2\times2\times5$的長方體	0	0

步驟 5.

活動一的最後，請預測堆成邊長為 $2\times2\times l$，l 為大於或等於 2 的整數，的長方體(如圖 5)，塗油漆後再拆開的情形，並完成小方塊個數之表格(表 7) (以 l 表示)。

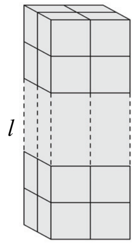


圖 5、邊長為 $2\times2\times l$ 的長方體

表 7、小方塊個數之表格(以 l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4(l-2)$	0	0	$4l$

探索數學規律活動二

小方塊是一種立方體的小積木，一般人很喜歡拿小方塊來堆疊成各種立體圖形。現在請你從小方塊堆疊出的立體圖形中，探索一些數學規律。(我們可將小方塊的邊長當作 1)

步驟 1.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $2\times2\times l$，l 為大於或等於 2 的整數的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 6)，並完成小方塊個數之表格(表 8) (以 l 表示)。

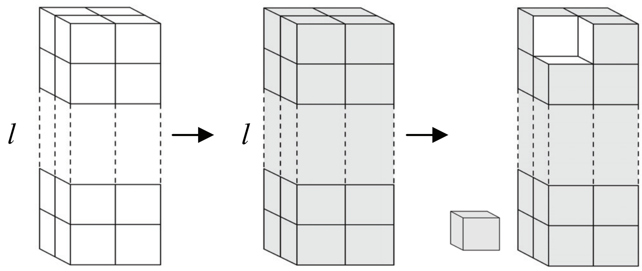


圖 6、拆開後的 $2\times2\times l$ 長方體

表 8、小方塊個數(以 l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4(l-2)$	0	0	$4l$

步驟 2.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $2\times3\times l$，l 為大於或等於 2 的整數的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 7)，並完成小方塊個數之表格(表 9) (以 l 表示)。

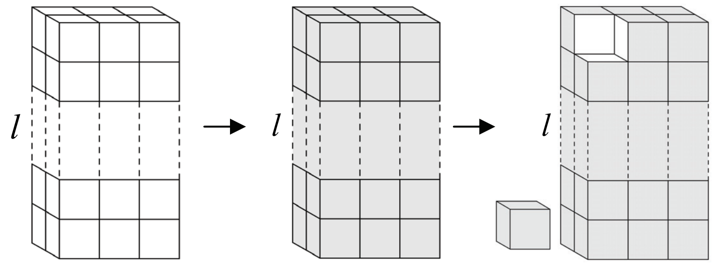


圖 7、拆開後的 $2\times3\times l$ 長方體

表 9、小方塊個數(以 l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4[(l-2)+(3-2)]$	$2(l-2)$	0	$6l$

步驟 3.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $2\times4\times l$，l 為大於或等於 2 的整數的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 8)，並完成小方塊個數之表格(表 10) (以 l 表示)。

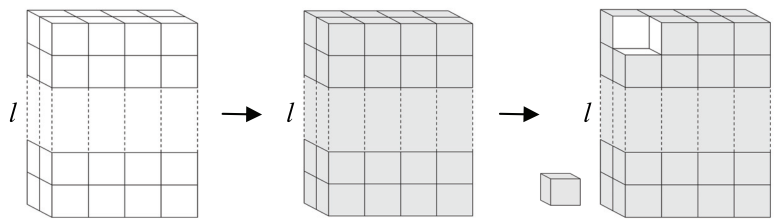


圖 8、拆開後的 $2\times4\times l$ 長方體

表 10、小方塊個數(以 l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4[(l-2)+(4-2)]$	$2[(l-2)(4-2)]$	0	$8l$

步驟 4.

請你整理前面各活動的資料完成小方塊個數之整理表格(表 11) (以 l 表示)，並找尋一些數學規律，以預測堆成邊長為 $2\times5\times l$ ，l 為大於或等於 2 的整數的長方體(如圖 9)塗油漆後再拆開的情形。

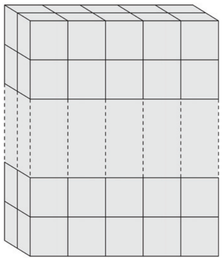


圖 9、邊長為 $2\times5\times l$ 的長方體

表 11、小方塊個數整理表格(以 l 表示)

	小方塊個數	3 個面被塗色的小方塊個數	2 個面被塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times2\times l$ 的長方體	$4l$	8	$4(l-2)$
邊長為 $2\times3\times l$ 的長方體	$6l$	8	$4[(l-2)+(3-2)]$
邊長為 $2\times4\times l$ 的長方體	$8l$	8	$4[(l-2)+(4-2)]$
邊長為 $2\times5\times l$ 的長方體	$10l$	8	$4[(l-2)+(5-2)]$

邊長為 $2\times5\times l$ 的長方體中，有 2 個面被塗色的小方塊個數是多少？

$4[(l-2)+(5-2)]$個。

請問你找出來的規律是什麼？每增加一層多 4 個。

請繼續完成小方塊個數之整理表格(表 12 及表 13)。

表 12、小方塊個數整理表格(以 l 表示)

	1 個面被塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times2\times l$ 的長方體	0
邊長為 $2\times3\times l$ 的長方體	$2(l-2)(3-2)$
邊長為 $2\times4\times l$ 的長方體	$2(l-2)(4-2)$
邊長為 $2\times5\times l$ 的長方體	$2(l-2)(5-2)$

邊長為 $2\times5\times l$ 的長方體中，有 1 個面被塗色的小方塊個數是多少？$\underline{2(l-2)(5-2)}$個

請問你找出來的規律是什麼？每增加一層多出 $\underline{2(l-2)}$個

表 13、小方塊個數整理表格(以 l 表示)

	未塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times2\times l$ 的長方體	0
邊長為 $2\times3\times l$ 的長方體	0
邊長為 $2\times4\times l$ 的長方體	0
邊長為 $2\times5\times l$ 的長方體	0

步驟 5.

活動二的最後，請預測堆成邊長為 $2\times m\times l$ ，m,l 為大於或等於 2 的整數的長方體(如圖 10)，塗油漆後再拆開的情形(表 14)(以 m,l 表示)。

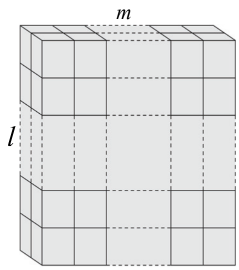


圖 10、邊長為 $2\times m\times l$ 長方體

表 14、小方塊個數之表格(以 m,l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4[(m-2)+(l-2)]$	$2(m-2)(l-2)$	0	$2ml$

探索數學規律活動三

小方塊是一種立方體的小積木，一般人很喜歡拿小方塊來堆疊成各種立體圖形。現在請你從小方塊堆疊出的立體圖形中，探索一些數學規律。(我們可將小方塊的邊長當作 1)

步驟 1.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $2 \times m \times l$ ，m,l 為大於或等於 2 的整數的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 11)，並完成小方塊個數之表格(表 15) (以 m,l 表示)。

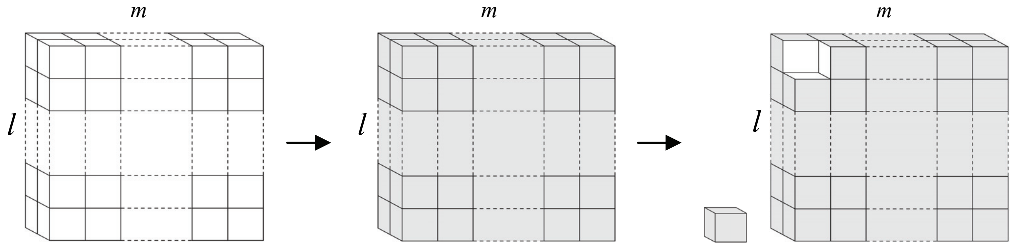


圖 11、拆開後的 $2 \times m \times l$ 長方體

表 15、小方塊個數(以 m,l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4[(m-2)+(l-2)]$	$2[(m-2)(l-2)]$	0	$2ml$

步驟 2.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $3 \times m \times l$ ，m,l 為大於或等於 2 的整數的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 12)，並完成小方塊個數之表格(表 16) (以 m,l 表示)。

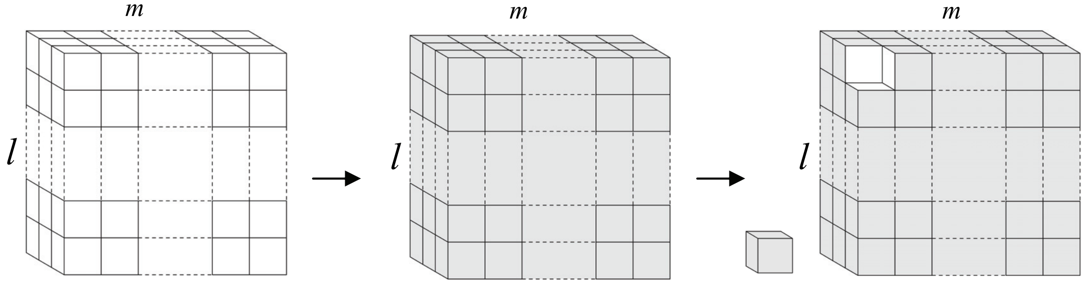


圖 12、拆開後的 $3 \times m \times l$ 長方體

表 16、小方塊個數(以 m,l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4[(m-2)+(l-2)+(3-2)]$	$2[(m-2)(l-2)+(m-2)+(l-2)]$	$(m-2)(l-2)$	$3ml$

步驟 3.

請你用小方塊堆成一個邊長為 $4\times m\times l$ ，m,l 為大於或等於 2 的整數的長方體，並假想在長方體的表面塗油漆後再拆開(如圖 13)，並完成小方塊個數之表格(表 17) (以 m,l 表示)。

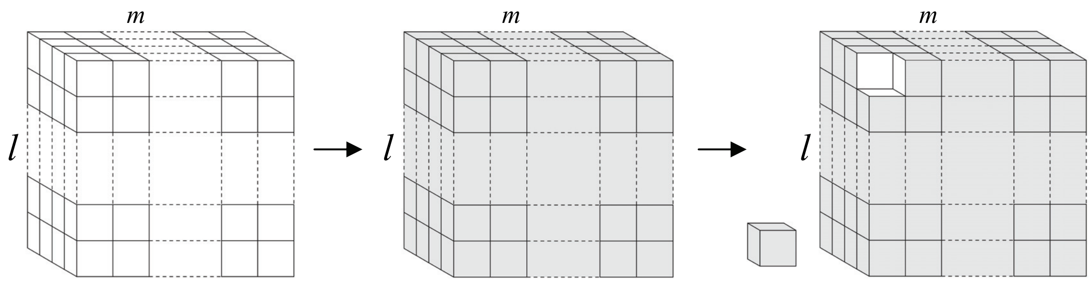


圖 13、拆開後的 $4\times m\times l$ 長方體

表 17、小方塊個數(以 m,l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4[(m-2)+(l-2)+(4-2)]$	$2[(m-2)(l-2)+2(m-2)+2(l-2)]$	$(m-2)\times(l-2)(4-2)$	$4ml$

步驟 4.

請你<u>整理</u>前面各活動的資料完成小方塊個數之整理表格(表 18) (以 l 表示)，並找尋一些數學規律，以預測堆成邊長為 $5\times m\times l$，m,l 為大於或等於 2 的整數的長方體(如圖 14)塗油漆後再拆開的情形。

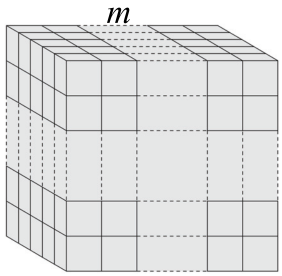


圖 14、邊長為 $5\times m\times l$ 的長方體

表 18、小方塊個數整理表格(以 m,l 表示)

	小方塊個數	3 個面被塗色的小方塊個數	2 個面被塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times m\times l$ 的長方體	$2ml$	8	$4[(m-2)+(l-2)+(2-2)]$
邊長為 $3\times m\times l$ 的長方體	$3ml$	8	$4[(m-2)+(l-2)+(3-2)]$
邊長為 $4\times m\times l$ 的長方體	$4ml$	8	$4[(m-2)+(l-2)+(4-2)]$
邊長為 $5\times m\times l$ 的長方體	$5ml$	8	$4[(m-2)+(l-2)+(5-2)]$

邊長為 $5\times m\times l$ 的長方體中，有 2 個面被塗色的小方塊個數是多少？

<u>$4[(m-2)+(l-2)+(5-2)]$個</u>

請問你找出來的規律是什麼？<u>每增加一層多 4 個</u>

請繼續完成小方塊個數之整理表格(表 19)。

表 19、小方塊個數整理表格(以 m,l 表示)

	1 個面被塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times m\times l$ 的長方體	$2(m-2)(l-2)$
邊長為 $3\times m\times l$ 的長方體	$2[(m-2)(l-2)+(m-2)+(l-2)]$
邊長為 $4\times m\times l$ 的長方體	$2[(m-2)(l-2)+2(m-2)+2(l-2)]$
邊長為 $5\times m\times l$ 的長方體	$2[(m-2)(l-2)+3(m-2)+3(l-2)]$

邊長為 $5\times m\times l$ 的長方體中，有 1 個面被塗色的小方塊個數是？

<u>$2\ [(m-2)(l-2)+3(m-2)+3(l-2)]$個</u>

請問你找出來的規律是什麼？<u>每增加一層多出 $2[(m-2)+(l-2)]$個</u>

請繼續完成小方塊個數之整理表格(表 20)。

表 20、小方塊個數整理表格(以 m,l 表示)

	未塗色的小方塊個數
邊長為 $2\times m\times l$ 的長方體	0
邊長為 $3\times m\times l$ 的長方體	$(3-2)(m-2)(l-2)$
邊長為 $4\times m\times l$ 的長方體	$(4-2)(m-2)(l-2)$
邊長為 $5\times m\times l$ 的長方體	$(5-2)(m-2)(l-2)$

邊長為 $5\times m\times l$ 的長方體中，未塗色的小方塊個數是多少？$(5-2)(m-2)(l-2)$個

請問你找出來的規律是什麼？每增加一層多出$(m-2)(l-2)$個

步驟 5.

活動三的最後,請預測堆成邊長為 $n\times m\times l$，n,m,l 為大於或等於 2 的整數的長方體(如圖 15)，塗油漆後再拆開的情形(表 21) (以 n,m,l 表示)。

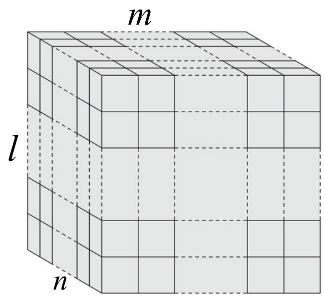


圖 15、邊長為 $n\times m\times l$ 的長方體

表 21、小方塊個數之表格(以 n,m,l 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$4[(n-2)+(m-2)+(l-2)]$	$2[(n-2)(m-2)+(n-2)(l-2)+(m-2)(l-2)]$	$(n-2)(m-2)(l-2)$	nml

特別的，$n\times n\times n$ 正方體積木之立體圖(圖 16)及對應著色之表格(表 22)

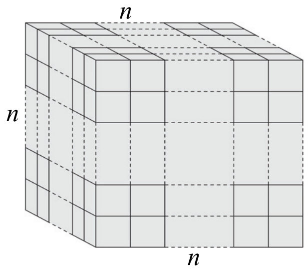


圖 16、邊長為 $n\times n\times n$ 的正方體

表 22、小方塊個數之表格(以 n 表示)

被塗到 3 個面的小方塊個數	被塗到 2 個面的小方塊個數	被塗到 1 個面的小方塊個數	被塗到 0 個面的小方塊個數	總共有幾個小方塊
8	$12(n-2)$	$6(n-2)^2$	$(n-2)^3$	n^3

所以 $5\times5\times5$ 的正方體積木，表面著色後拆開著 3 面有 8 小塊；著 2 面的有 36 小塊；著 1 面的有 54 小塊；6 面都沒著色的有 27 小塊，共 125 小塊。

結論：(核驗下列乘法公式)

邊長為 $n\times m\times l$ ，n,m,l 為大於或等於 2 的整數的長方體：

$$
\begin{aligned}
nml &= [(n-2)+2][(m-2)+2][(l-2)+2] \\
&= \underbrace{(n-2)(m-2)(l-2)}_{\text{0 面}} + \underbrace{2[(n-2)(m-2)+(n-2)(l-2)+(m-2)(l-2)]}_{\text{1 面}} \\
&\quad + \underbrace{4[(n-2)+(m-2)+(l-2)]}_{\text{2 面}} + \underbrace{8}_{\text{3 面}}
\end{aligned}
$$

特別的，當 $n=m=l$ 時為正方體 $n\times n\times n$

$$
\begin{aligned}
n^3 &= n\times n\times n \\
&= \underbrace{(n-2)^3}_{\text{0 面}} + \underbrace{6(n-2)^2}_{\text{1 面}} + \underbrace{12(n-2)}_{\text{2 面}} + \underbrace{8}_{\text{3 面}}
\end{aligned}
$$

在塗油漆的問題中，一則從各表格中尋找規律，事實上，在小方塊數多時，要正確點數塗油漆的個數，要有方法才不會數錯，這個點數的方法就是規律，答案就出來了。

參、作業貳：找出三階方陣乘方的規律([3])

實施對象：高二學過矩陣中高程度的學生

先備知識：三階方陣的乘法知識

原題：若矩陣 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，試問 $A^n=?$

修題：若方陣 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$，n 為正整數，試用一般式表方陣 A^n 。

活動一：寫出方陣 A^2

$$A^2=\begin{bmatrix}\_\_ & 0 & \_\_\\ \_\_ & 2^2 & \_\_\\ \_\_ & 0 & \_\_\end{bmatrix}$$

活動二：寫出方陣 A^3

$$A^3=\begin{bmatrix}\_\_ & 0 & \_\_\\ \_\_ & 2^3 & \_\_\\ \_\_ & 0 & \_\_\end{bmatrix}$$

活動三：寫出方陣 A^4

$$A^4=\begin{bmatrix}\_\_ & 0 & \_\_\\ \_\_ & 2^4 & \_\_\\ \_\_ & 0 & \_\_\end{bmatrix}$$

活動四：請比較 A， A^2 ， A^3 ， A^4 各對應元的數值，你會發現它們之間的關聯，各對應元的數值有一個很有意思的規律。

請問：這些規律你發現了嗎？全部___；部分___

例如它們的第一行第二列數值有什麼規律______

利用各元之間的規律性，試直接寫出：

$$A^5=\begin{bmatrix}\_\_ & \_\_ & \_\_\\ \_\_ & \_\_ & \_\_\\ \_\_ & \_\_ & \_\_\end{bmatrix}$$

活動五：依序再直接寫出：

$$A^6=\begin{bmatrix}\_\_ & \_\_ & \_\_\\ \_\_ & \_\_ & \_\_\\ \_\_ & \_\_ & \_\_\end{bmatrix}$$

活動六：那麼你能寫出一般 A^n 的結果了嗎？

$$A^n=\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$$

活動七：上面的結果適用 n=1 的情況嗎？______________

活動八：你能用數學歸納法來驗證 A^n 的正確性嗎？請填寫完成下面矩陣：

$$A^{n+1}=A^nA=A^n\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \\ \_\_ & \_\_ & \_\_ \end{bmatrix}$$

注：參考答案 $A^n=\begin{bmatrix} -(2^n-2) & 0 & -(2^{n+1}-2) \\ 2^n-1 & 2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 0 & 2^{n+1}-1 \end{bmatrix}$

肆、數學科試題改編成實作評量舉例

底下另再提出二道出自 99 學年度高一上學期數學段考試題([4]、[5] 、[6])及一道 100 年指考數學甲的選填題，改編為實作評量題，提供高中數學評量的參考。

一、原題([4])

設二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形過一、三、四象限，其圖形如圖 17，則下列何者正確？______

(1) $a<0$

(2) $b<0$

(3) $c<0$

(4) $b^2-4ac<0$

(5) $a+b+c>0$

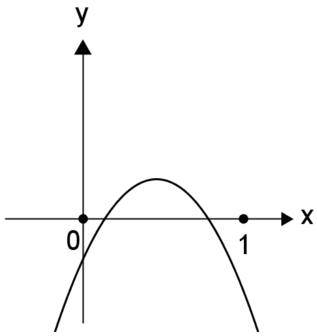


圖 17

改編成如下的實作評量題：

主題：

設二次函數 $y=ax^2+bx+c$，其圖形經過第一、三、四象限，但不經過第二象限及原點，則 a 、 b 、 c 、 b^2-4ac 及 $a+b+c$ 等常數之正、負或 0 如何確定呢？

活動 1： $y=x^2-6x-7$ 的二次函數符合原題的條件嗎？<u>不符合</u>；

理由：<u>其圖形過第二象限</u>

活動 2： 確定 a 之正、負

步驟 1： $y=ax^2+bx+c$ 之圖形凹口是向上還是向下？<u>向下</u>

步驟 2：a 之正、負或 0 可以判定出來嗎？<u>$a<0$</u>

活動 3： 設 $y=ax^2+bx+c$，其圖形如圖 18，判定 b、c、b^2-4ac 及 $a+b+c$ 之正、負或 0。

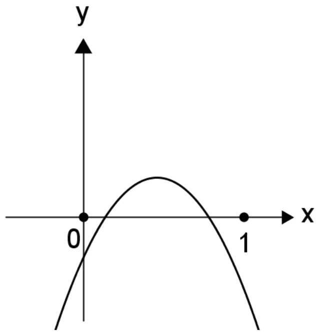


圖 18

步驟 1：c 之正、負或 0 為何？<u>$c<0$</u>

步驟 2：b 之正、負或 0 為何？<u>$b>0$</u>

步驟 3： b^2-4ac 之正、負或 0 為何？<u>$b^2-4ac>0$</u>

步驟 4： $a+b+c$ 之正、負或 0 為何？<u>$a+b+c=f(1)<0$</u>

活動 4： 設 $y=ax^2+bx+c$，其圖形如圖 19，活動 3 中的哪些常數之正、負仍然不變？

<u>b、c、b^2-4ac</u>

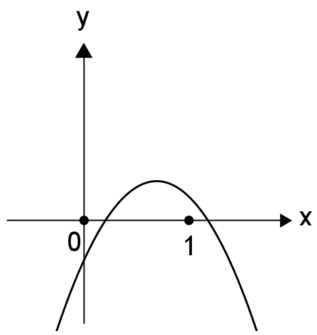


圖 19

活動 5 (結論)： 原實作評量題中哪些常數之正、負可以確定：

<u>$a<0$、$b>0$、$c<0$、$b^2-4ac>0$</u>

何者無法確定？<u>$a+b+c$ (它可能正、負或 0)</u>

並可發現：考慮二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形 Γ，則 Γ 經第一、三、四象限而不經過第二象限與原點之充要條件為 <u>$a<0, b>0, c<0, b^2-4ac>0$</u>

二、原題([5])

已知 $f(x)=x^2-6x+5$ 若在 $a\le x\le b$ 範圍內有 2 個 x 值使 $f(x)$ 得到最大值，則 $a+b=$ ______

這是一道新穎簡易的概念題，如果知道二次函數的對稱性，畫出其圖形應可容易求解，很適合充作一般程度的高一上第一次段考的試題；亦可經由下列的方式改編成實作評量題：

主題：

設 $f(x)=x^2-6x+5$，且知在 $a\le x\le b$ 時 $f(x)$ 有 2 個 x 值使 $f(x)$ 得到最大值，試確定 a，b 的關係。

活動 1：

a，b 可同時小於 3 或同時大於 3 嗎？

步驟 1： $a=0, b=2,$ 能使主題成立嗎？

不能(此時 $f(x)$ 只有 $x=0$ 一個最大值 $f(0)=5$)

步驟 2： $a=4, b=6,$ 能使主題成立嗎？

不能(此時 $f(x)$ 只有 $x=6$ 一個最大值 $f(6)=5$)

步驟 3： $a=1, b=5,$ 能使主題成立嗎？ 能(此時 $f(1)=f(5)$ 為最大值)

步驟 4 (結論)：a，b 不可同時小於 3 也不可同時大於 3，對嗎？ 對

活動 2：

當 $-100\le a<b\le 100$ 有多少組整數數對 (a,b) 能符合主題的假設呢？

步驟 1：當 $-6\le a<b\le 6$ 時，列出所有整數數對 (a,b)，在 $a\le x\le b$ 有 2 個 x 值使 $f(x)$ 得到最大值：(2, 4)、(1, 5)、(0, 6)

步驟 2：那麼當 $-10\le a<b\le 10$ 時有多少組整數數對 (a,b)，在 $a\le x\le b$ 有 2 個 x 值使 $f(x)$ 得到最大值： 7 組

步驟 3：當 $-100\le a<b\le 100$ 有多少組整數數對 (a,b) 能符合主題的假設呢？ 97 組

活動 3：

有多少組數對 (a,b)，$a<b$ 能符合原主題的假設呢？

步驟 1：當 $a=2.5$ 時，b 之值為 3.5

步驟 2：當 $a=3-\sqrt{2}$ 時，b 之值為 $3+\sqrt{2}$

步驟 3：有多少組實數對 (a,b) 能符合原主題的假設呢？ 無限多組

活動 4 (結論)：

原主題中 a，b 的關係如何？ $a+b=6$ (或 a，b 為以 3 為對稱中心的對稱點)

三、原題(100 年指考數學甲選填題 C)

坐標平面上，已知函數 $f(x)=4x^3+x-2$ 的圖形以 $A(1,3)$ 為切點的切線為 L，則以切線 L 及曲線 $y=f(x)$ 為界所圍成區域的面積為 ⑫⑬ 。

這是一道得分率 38%中偏難、高鑑別度 71%的三次函數指考數學甲微積分範圍的新穎好試題。可改編成下面難度不一的操作型實作評量題([7])：

主題：

設三次函數 $y=f(x)=ax^3+cx+d$ 的圖形為 Γ，以 $A(h,f(h))$ 為切點的切線為 L，與 Γ 圍成的封閉區域為 R，則 R 的面積為何？

活動 1：

考慮 $y=f(x)=x^3$， $A(1,1)$ 的特例。

步驟 1：此時切線 L 的方程式為 $\underline{y=3x-2}$；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2}$ 。

步驟 2：R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{\frac{27}{4}}$ 。

活動 2：

考慮 $y=f(x)=x^3$， $A(h,h^3)$ 且 $h\neq 0$ 的情況。

步驟 1：切線 L 的方程式為 $\underline{y=3h^2x-2h^3}$；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$ 。

步驟 2：此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(x^3-3h^2x+2h^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{\frac{27}{4}h^4}$ 。

活動 3：

考慮 $y=f(x)=x^3+d$ ， $A(h,h^3+d)$ 且 $h\neq 0$ 的情況；切線 L 的方程式為 $\underline{y=3h^2x-2h^3+d}$；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(x^3-3h^2x+2h^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{\frac{27}{4}h^4}$ 。

活動 4：

考慮 $y=f(x)=x^3+x+d$ ， $A(h,h^3+h+d)$ 且 $h\neq 0$ 的情況；切線 L 的方程式為 $\underline{y=(3h^2+1)x-2h^3+d}$ ；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$ ，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(x^3-3h^2x+2h^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{\frac{27}{4}h^4}$ 。

活動 5：

當 $y=f(x)=4x^3$ ， $A(1,4)$ 的情況；此時切線 L 的方程式為 $\underline{y=12x-8}$ ；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2}$ ，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2}^{1}(4x^3-12x+8)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{27}$ 。

活動 6：

當 $y=f(x)=4x^3$ ， $A(h,4h^3)$ 的情況；此時切線 L 的方程式為 $\underline{y=12h^2x-8h^3}$ ；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$ ，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(4x^3-12h^2x+8h^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{27h^4}$ 。

活動 7：

當 $y=f(x)=4x^3+d$ ， $A(h,4h^3+d)$ 的情況；此時切線 L 的方程式為 $\underline{y=12h^2x-8h^3+d}$ ；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$ ，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(4x^3-12h^2x+8h^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{27h^4}$ 。

活動 8：

當 $y=f(x)=4x^3+x+d$ ， $A(h,4h^3+h+d)$ 的情況；此時切線 L 的方程式為 $\underline{y=(12h^2+1)x-8h^3+d}$ ；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$ ，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(4x^3-12h^2x+8h^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{27h^4}$ 。

活動 9：

當 $y=f(x)=4x^3+cx+d$ ， $A(h,4h^3+ch+d)$ 的情況；此時切線 L 的方程式為 $\underline{y=(12h^2+c)x-8h^3+d}$ ；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$ ，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(4x^3-12h^2x+8h^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{27h^4}$ 。

活動 10：

當 $y=f(x)=ax^3+cx+d$ ， $a>0$ ， $A(h,ah^3+ch+d)$ ， $h\neq 0$ 的情況；此時切線 L 的方程式為 $\underline{y=(3ah^2+c)x-2ah^3+d}$ ；並設 L 與 Γ 的另一交點為 B，則 B 的 x 坐標為 $\underline{-2h}$ ，此時 R 的面積 $A(R)$ 用定積分可以表示成 $\underline{\int_{-2h}^{h}(ax^3-3ah^2x+2ah^3)dx}$ ，且 $A(R)$ 之值為 $\underline{\frac{27}{4}ah^4}$ ，一般的情況， $a\neq 0$ 、 $h\neq 0$ 時 $A(R)$ 之值為 $\underline{\frac{27}{4}|a|h^4}$ 。

活動 11：

特別情況 $y=f(x)=4x^3+x-2$ ，$A(1,3)$時 $A(R)$之值為 27 。

活動 12：

$y=x^3$，$A(-2,-8)$時 $A(R)$之值為 108 ，而 $y=f(x)=4x^3+x-2$ ，$A(-2,-36)$時 $A(R)$之值為 $432(=27\times16)$ 。

伍、結論

實作評量可針對特殊的數學甄試來設計，例如數理實驗班、資優班或科學班的試題(含甄選、段考或會考)，另如中小學數學科教師的甄選，由實例可顯現其功能。尤其可就適當的對象，搭配彈性配分的新穎簡易實作評量題，應是好的題型，即使數學大考設計一道答題 10~15 分鐘以內，配分 10~20 分的實作評量題，也可使它形成既有特色又具效率的評量。99 年指考數學乙選填題 C；100 年指考數學甲多選題 6 與非選擇題一，亦可改編成很有特色的實作評量題，不妨試一試，會發現改編的難度不高而又能大大提昇命題技術，又可增進學生的思考層面，期待數學教師善用實作評量，促進數學教學的正面發展。

參考文獻

1. 陳昭地(民 98)，數學命題技術與探討，98 康熹數學報報，http://www.knsi.com.tw/。
2. MSPAP(the Marylard School Performance Assessment Program)，教育部 84 年度國民教育階段學生基本學習成就評量研究計劃報告第 20-26 頁(85 年 5 月修訂，國立臺灣師範大學出版)。
3. 國立臺灣師範大學附屬高級中學第一屆科學班資格考數學試題(100 年 8 月)
4. 高雄市立小港高級中學 99 學年度高一上學期第一次段考數學科試題。
5. 臺北市第一女子高級中學數 99 學年度高一上學期第一次段考數學科試題。
6. 李虎雄、陳昭地、朱亮儒(民 99)，康熹文化普通高級中學數學(I)(第 2 章) http://www.knsi.com.tw/。
7. 朱亮儒、洪有情、陳昭地(民 99)，三次函數圖形的三個超額特徵，科學教育月刊第 335 期第 21-35 頁(99 年 12 月)，國立臺灣師範大學科學教育中心出版。