
問題寫作作為評量工具-- 以最大公因數的應用問題為例

詹才億

國立嘉義大學 數理教育研究所

在強調多元評量的時空背景下，各種評量工具如雨後春筍般推陳出新。數學寫作即是日漸興起的一種評量工具。除了較常被使用的解釋性寫作與總結性寫作之外，問題寫作(problem writing)亦是一種能有效區分學生理解層次、明確指出學生迷思，作為教師課程設計參考的評量工具。本文以「最大公因數的應用問題」為例，說明教師如何分析學生問題寫作的作答類型並將評量結果應用在教學實務上，以協助不同理解層次的學生都能突破迷思，讓抽象的數學運算與生活經驗建立連結，達成有意義的學習。

壹、緒論

寫作一般被歸類為語文相關領域的學習活動。事實上，寫作活動對加深學生的數學概念理解程度也有實質幫助，除了有效提升他們的進步幅度之外，更能展現在測驗的分數上(Harrell, 2003)。所謂問題寫作(problem writing)，是指在給定的提示(prompt)下，創作一個符合當前學習的數學概念之數學文字題。研究指出，學生為給定的算式進行問題寫作時，能洞察蘊含

在算式背後的實質意義並產生更深層的理解(Whitin & Whitin, 1998)。Barlow 與 Cates(2007)更將問題寫作視為一種對學生的數學理解、問題解決技巧與數學意向(mathematical dispositions)有正面影響力的數學任務。此外，問題寫作也有助於學生將數學符號透過自己創作的問題情境與真實世界做連結(劉祥通和黃國勳，2005)。換句話說，問題寫作提供了學生與自己的對話平台，藉由自我澄清與反思，建構起完整的數學概念並能運用到外在情境中。另一方面，藉由觀察分析學生創作的題目，教師可視不同程度學生的需求調整學習單內容、以此做為同質或異質分組的依據、診斷學生對數學概念的學習狀況並作為教師設計後續課程時的參考、針對特定學習落後的學生設計補救教學(Drake & Barlow, 2008)。總而言之，問題寫作建立了師生間有效的溝通管道，學生藉此讓自己的概念理解趨於完備，教師也可從中檢視自己教學上尚可精進之處，教學相長。

當教師使用問題寫作作為評量工具時，Neill(2008)提出下列幾點供教師作為觀察的指標與判準：

一、學生創作的題目是否符合給定的提示？

以給定提示 $6 \div \frac{1}{2}$ 為例，若學生創作的題目為：6 顆蘋果的一半是幾顆？其代表的是 $6 \times \frac{1}{2}$ 這個算式，與給定提示不符，此時可進一步分析是因為學生對乘、除法產生混淆亦或是對分數除法的解讀不當所導致。

二、題目所蘊含的知識層次是否具水準？

以給定提示 $2 \times 3 \times 4$ 為例，若學生創作的題目為：請問 $2 \times 3 \times 4$ 是多少？此題目與直接作數字計算無異，較不具水準。若改為：有一長方體長、寬、高分別為 4、3、2，試問其體積為多少？此題將單純的乘法運算與幾何概念作連結，屬較具水準的問題創作，可認定學生對乘法有較高層次的理解。

三、題目中是否提供了足夠的解題資訊？

以給定提示 [3,5] (3 和 5 的最小公倍數) 為例，若學生創作的題目為：有一堆糖果，3 個一數或 5 個一數都恰好數完，請問共有幾顆糖果？此題答案有無限多個，須再加上「最少」有幾顆，題目才完整。

四、學生能否為自己的題目提供正確的解題模式？

不管給定提示為何，在學生創作完題

目之後，應對自己的題目提出解答。經由解題過程中產生的矛盾與反思，讓學生找出自己題目的缺失並自我校正。

五、學生是否提出了正確的問句？

以給定提示 $15 \div 3$ 為例，若學生創作的題目為：小明有 15 個杯子蛋糕分給朋友，每人分 3 個，請問每人可分到幾個？此題的問句應改為「可分給幾個朋友？」才恰當。

據筆者實務經驗，學生對最大公因數的基礎概念與運算都有一定程度的理解，但若將概念延伸為各式各樣的應用問題時，在解題上便產生困難。學生流於追求解題速度、忽略了數學文字題中的條件敘述、盲目的使用題目中給定的數字進行運算、對自己列出的算式不求甚解，最終導致了無效的學習。因此筆者以最大公因數的概念讓學生進行問題寫作，希望藉由學生創作題目的過程中，了解如何分析應用問題中給定的條件並與題目所求建立連結，進而順利解題。研究對象為南部地區某國中一年級學生，全班共 35 人，活動進行時間約 15 分鐘。給定的提示為：請寫出一個求【72 與 90 的最大公因數】的應用問題。以下就學生創作的題目，分成四個錯誤類型與兩個正確類型進行分析，以提供教育伙伴參考。

貳、實例分析與說明

一、錯誤類型實例

(一) 錯誤類型一：創作題目不符合給定提示

A: (18, 72) 請寫出18和72的最大公因數

圖 1、創作題目不符合給定提示的學生擬題內容

見圖 1，犯此類型錯誤的同學，第一個動作都是先求 72 與 90 的最大公因數 18，再創作一個答案是 18 的應用問題。從上圖學生的作答可明顯看出，學生對利用短除法求最大公因數已十分熟悉，然而其創作的題目並不符合所給提示。解題的過程中並未應用到求 72 與 90 的最大公因數之概念，只是求得的答案也是 18 而已。再者，其創作的題目只是計算題的一種變形，不能算是應用問題。進一步分析其錯誤成因，若是學生對所給提示有誤解，教師可再次對問題寫作進行說明，並請學生另行創作題目；若是因為學生對最大公因數的理解程度不足，則需對其進行補救教學，待教學完成後再行創作。

(二) 錯誤類型二：題目未與生活情境作結合

某數既能被72和90都可以整除，請問某數最大是多少？

圖 2、題目未與生活情境作結合的學生擬題內容

見圖 2，此題解題過程的確是求 72 與 90 的最大公因數，題目條件也十分完整。但嚴格來說，只是將最大公因數的意義轉換成文字重述。雖可由此看出學生對最大

公因數的定義有深刻的理解，但卻未與生活情境建立連結，算是模擬兩可的答案。教師應要求其另行創作一結合真實情境之應用問題，提升題目的知識層次，並增進學生將數學概念應用到外在環境的能力。

(三) 錯誤類型三：題目中提供的解題資訊不完整

學生發生此錯誤類型的比例最高，但錯誤程度有所差異。有些完全沒有提到分組的方式或條件，無法進行解題；有些強調兩種物品皆要分完，卻沒提到每個人不僅得到的總數量要相同，兩種物品數量也要分別相同；有些則是忽略了所求的值要加上最大的條件才能得到唯一解。以下依學生創作題目中解題資訊的完整性，分成三個例子做分析。

全校有72位男生，90位女生，他們要分組玩遊戲，請問可以分幾組？男、女生各幾人？

$3 \times 3 \times 2 = 18$

A. 18組 64人 5人

圖 3、解題資訊不完整的學生擬題內容之一

見圖 3，此題為人員分組問題。雖然題目中適切的將 72 與 90 以性別分成兩類，然而對解題必備的分組方式及條件卻毫無著墨，形成無效的問題。再看學生接下來的解題方式，卻是解分組問題的標準作法。兩相對照之下，應證了學生平時解此類應用問題時，並未仔細閱讀題目對於分組方式的敘述，只對題目中給定的數字

做運算，解題淪為一種機械式的操作。這種只重答案缺乏思考的學習方式，不但造成概念理解的不完整，也讓學生無法體會數學的樂趣，十分可惜。筆者教學時曾遇到兩個不同類型的分組問題，造成學生的解題迷思。舉例來說，男生 72 人與女生 90 人做分組，每組人數要一樣多，如果是男女混編，72 與 90 的最大公因數代表的是可分的最多組數；若是男、女生分開編組，其代表的則是每組的最多人數。若學生平日不求甚解，往往就容易產生混淆。因此，當教師在課堂上進行解題教學時，應多強調題目已知條件的分析，確認學生已掌握問題的全貌後，再進行列式運算的動作。列式時也應詳細解釋算式代表的意義，學生的概念理解才能提升到較高的層次，當題目的解題資訊有所變化時，也才能舉一反三。

謝小葉有 72 顆巧克力和 90 顆口香糖。今天她的生日，她想把糖果分給班上的同學，若每人得到的糖果一樣多，請問他們班上有幾個人？

圖 4、解題資訊不完整的學生擬題內容之二

見圖 4，此題是兩種物品的分配問題，然分裝的方式的陳述卻過於含糊不清。首先，依照題目所述「每個人得到的糖果數一樣」，其中巧克力與口香糖皆被歸類為糖果，總數量為 162 顆，此題目遂變成單一物品的分配。如此將兩種物品混為一談，易讓解題者誤以為只要把 162 顆糖果平均分給同學即可，因此同學人數就成了 162 的因數，解題方式也自然偏離了原本給定的提示。此處應將敘述改為「每個

人得到的巧克力與口香糖數量分別相同」。再者，問句中只提到「班上有幾個人？」是不夠清楚的，應再加上“至多”兩字才符合「最大」公因數的意義。教師可將此例在課堂上給同學做討論，引導同學將此題修正完整後，再與原先題目做比較，讓學生感受到題目敘述對解題時產生的影響有多巨大，也讓同學解題時能更加重視題目的敘述方式，而非一味埋頭苦算。

今天有梨子 72 個和蘋果 90 個，現在要把梨子和蘋果裝成禮盒，每一盒的梨子和蘋果數量相同，請問可以裝成幾個禮盒？

圖 5、解題資訊不完整的學生擬題內容之三

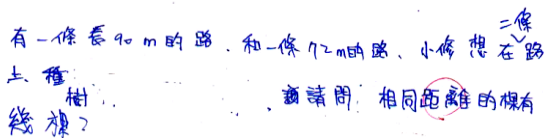
見圖 5，此題的分裝條件「每一盒梨子和蘋果的數量相同」相較於圖 3、圖 4 兩例已有程度上的差異，可惜語意仍不夠清楚。這樣的敘述也可被解讀為每一盒裡面的梨子數量等於蘋果的數量。若能更進一步詳述分裝條件，如「每一盒裡裝的梨子數量相同、蘋果數量也要相同」就清楚許多。另外，問句中缺少了「最多」這個條件，導致答案是 18 的所有因數，共有 6 個解。教師可針對此題讓學生進行課室討論，先由學生提出自己的答案，再引導學生探討解的個數，過程中除了修正原先的題目，也可以複習因數個數的算法。

(四) 錯誤類型四：提出了錯誤的問句

有一盒紅豆餅、一盒剪刀餅，
(有 72 個) (有 90 個)
請問 如果將它們混合起來裝，每一小盒一樣，那麼最多可裝幾個？

圖 6、提出了錯誤的問句的學生擬題內容之一

見圖 6，此題為兩種餅乾的分裝問題，學生雖試圖表達出分裝方式，卻僅以「每一小盒一樣」來帶過，如同錯誤類型三，學生使用文字敘述的技巧仍須教師協助調整。除此之外，值得注意的是題目中提出的問句不恰當。依照學生提出的問句「最多可裝幾個？」，答案應該是餅乾的總個數，也就是 162 個全部裝成一盒。應改成「最多可分裝成幾盒？」，才是合理的問句。筆者於實際課堂教學時，常常遇到學生明明能列出正確的算式進行解題，卻疏忽掉題目問的是什麼，導致全盤皆錯。教師在進行這類型錯誤的討論時，若能搭配幾個學生平常出錯的範例，應更能加深學生的印象，讓學生閱讀題目的問句時更加細心。



有一條長 90m 的路，和一條 72m 的路，小修想在路邊種樹... 請問：相同距離的棵有幾棵?

圖 7、提出了錯誤的問句的學生擬題內容之二

見圖 7，此題為種樹問題，是最大公因數的應用問題中有別於分裝問題的另一常見類型。圖中可見學生作答時有不少塗改之處，除了可能肇因於對最大公因數的理解不足之外，也可能是學生文字表達的能力欠佳，因此對種植方式及條件的敘述十分缺乏，尚有很大的進步空間。其一，學生遺漏了「相鄰兩樹間的距離都相等」的這個關鍵條件，雖然在問句有提到「相同距離」四個字，仍顯得詞不達意，應予以補足。其二，這類型的題目都會強調「路

的兩端都要種」，然而學生擬題時卻忽略了。其實這個敘述對題目本身而言是非常重要的，如果不是從道路的起始點開始種，就不僅僅是求 90 與 72 的最大公因數可以解決的了。而這也是教師在檢討此題型時可提出來供學生討論的。另一方面，即使學生將植樹的方式及條件詳述了，學生提出的問句「樹有幾棵？」卻仍不符合給定的提示。正確的問句應改為「兩樹之間的距離最大是多少？」。同樣的題目，當問句不同時，解題的歷程就跟著改變。若問「樹有幾棵？」解題時也必須要經歷求 72 與 90 的最大公因數這個步驟，但求出來的是兩樹間最大距離，需再利用路長才能解出樹有幾棵。這也是學生解題常犯的錯誤，需要教師強調提醒。

綜觀上述的錯誤類型，除了問句不恰當之外，學生對分裝方式的說明也不夠清楚。這兩個部分往往是學生犯錯的關鍵所在。教師進行補救教學時，應先了解學生犯錯的原因，才能對症下藥。Drake 與 Barlow(2008)曾提到，學生擬題時產生的錯誤除了歸因於缺乏對概念的真正理解以及學生的另有概念之外，也可能是因為學生不夠小心、寫作的技巧不佳、缺乏進行擬題寫作的指導等。針對學生缺乏理解與另有概念，教師可以利用下列活動進行補救教學。第一，教師可將學生創作的題目進行交換作答，讓同儕在作答時仔細檢視题目的可讀性與完整性，並提供原創者適當之建議。第二，教師可依錯誤類型將學生創作的題目編製成學習單，讓學生填

寫。除了可再次檢視每個學生的理解程度之外，也可繼續透過全班討論的方式，集思廣益讓題目更臻完善。而在修正題目的過程中，學生也可以有機會不斷反思回饋，藉以達到較高層次的理解。另一方面，若學生是因為不夠小心、寫作技巧不佳或缺乏擬題寫作的指導，教師應多進行此類活動並進行示範教學，讓學生熟練擬題寫作的方式，克服技術上的困難，才能進一步真實反映出學生的數學概念理解。

二、正確類型實例

(一) 正確類型一：

有72顆蘋果和90顆梨子，~~如果~~如果每袋的蘋果數要一樣，梨子數也要一樣，請問最多可以裝幾袋。

圖 8、正確的學生擬題內容之一

見圖 8，此題為學生在書本上最常遇到的分配問題，雖然學生在文字敘述的技巧上仍顯得有些不足，但對於分裝條件的說明已算清楚，也未漏掉“最多”這個關鍵詞。整體來說，題目創作不但符合給定提示，設計上也結合了生活情境，而學生創作的問題大多也屬這一類。

(二) 正確類型二：

有一張長方形長72公分，寬90公分，要剪成一樣大的正方形，請問正方形最大邊長幾公分？

圖 9、正確的學生擬題內容之二

見圖 9，此題為圖形分割問題，所有設計出正確題目的學生裡，只有一位採用這個題型。針對切割方式的敘述，以「剪

成大小相同的正方形」做說明，也未漏掉“最大”這個關鍵詞。另外，此類型的題目有時會問「可以剪成幾個正方形？」，不過這位學生並未產生混淆，仍提出了正確的問句。此題與幾何方面做結合，將最大公因數的應用做了分配或分組以外的推廣，能創作出這樣的題目，已屬難得。教師仍可進一步要求學生進行不同類型題目的創作，以釐清學生對最大公因數應用問題的理解程度是否確實趨於完備。

觀察全班學生創作的題目之後，發現學生解應用問題的困難是其來有自。數學解題的第一步驟便是了解題意，如果連題意都無法掌握，接下來的步驟也無從進行。然而依筆者教學經驗，學生在解最大公因數及最小公倍數的應用問題時，往往無心詳讀題目的文字敘述，只重視數字的部分，甚至取巧以關鍵字「最大」、「最小」來決定要取這些數字的最大公因數或最小公倍數。這樣的解題方式雖然在少數題型會犯錯，但大多是屢試不爽，除了造成學生的概念理解不完整，也限制了學生深入思考的機會。採用問題寫作的活動對學生進行診斷式評量，應是改善這種情況的可行辦法之一。

參、結語

美國數學教師協會(National Council of Teachers of Mathematics, NCTM)在「學校數學的原則與標準」(Principles and Standards for School Mathematics)中提出幾項過程標準(Process Standards)，其中三

項強調學生必須具備溝通、連結與表徵以及問題解決的能力(NCTM, 2000)。在問題寫作的活動中，學生在創作問題時與自己溝通、在修正問題時與同儕溝通、在呈現問題時與教師溝通。除了口語之外，筆也是一種強而有力的溝通媒介。強調學生創作的問題必須與生活情境作連結，把課堂上的數學知識應用到我們所處的真實世界，使數學不再是紙上談兵，只要用心體會，無處不是數學。另外，創作的題目中，可以利用實物、圖形、語言等不同表徵方式將數學符號作更清楚的表達，同時強化了學生的數學概念理解。最後，創作題目與解題活動看似互逆，實則相輔相成。進行問題寫作時學生須不斷以解題的觀點檢視自己是否漏失了什麼重要解題線索，才能創作出符合標準的題目，無形中也增進了學生了解題意及問題解決的能力。綜上所述，問題寫作對培養學生溝通、連結與表徵、問題解決的能力實有所助益，端看教師如何善加運用。

無論發展出多少有效的評量工具，如果教師不嘗試去使用，不但學生無法受益，對增進教師的專業成長也是一大阻礙。因此筆者將問題寫作活動融入課堂之中，嘗試去分析學生各種錯誤類型並思考解決方案，期望能收拋磚引玉之效，吸引更多教師伙伴試著將問題寫作的評量方式更廣泛的運用到數學的其他單元上。相信

只要願意踏出第一步，接踵而來的回饋與成長必能轉化為持續下去的動力。更重要的，是協助學生在數學學習的道路上，走得更加順遂而長遠。

參考文獻

- 劉祥通和黃國勳(2005)。數學寫作活動的類型與實例。台灣數學教師(電子)期刊, 1, 頁 2-11。
- Barlow, A. T., & Cates, J. M. (2007). The answer is 20 cookies, what is the question? *Teaching Children Mathematics*, 13, 316-318.
- Drake, J. M., & Barlow, A. T. (2008). Assessing students' levels of understanding multiplication through problem writing. *Teaching Children Mathematics*, 13(6), 272-277.
- Harrell, C. P. (2003). Writing in mathematics: A powerful tool to support math learning. *Math counts: Issues that matter*. Macmillan McGraw-Hill. Retrieved February 2, 2011, from www.mhschool.com/math/2003/teacher/teachers/mathissues/pdfs/math_writing.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Neill, A. (2008). Mathematical problem writing. New Zealand Council for Educational Research. Retrieved February 7, 2011, from <http://arb.nzcer.org.nz/strategies/mpw.php>
- Whitin, D. J., & Whitin, P. E. (1998). The "write" way to mathematical understanding. In L. J. Morrow, & M. J. Kenny(Eds.), *The teaching and learning of algorithms in school mathematics*. Reston, Virgin: National Council of Teachers of Mathematics.