連鎖規則的探究

朱啟台 [1]* 曾政清 [2] 陳昭地 [3]

[1] 教育部 高中數學學科中心

[2] 臺北市立建國高級中學

[3] 國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

微積分這門學問是從十七世紀歐洲數學家為研究切線、速度加速度、極大極小值與面積等四個主題所發展出來的，這四個主題中最關鍵的就是切線和面積兩大問題。當代包括費馬（Pierre de Fermat，1601~1665）、笛卡兒（René Descartes，1596~1650）、惠更斯（Christian Huygens，1629~1695）和巴洛（Isaac Barrow，1630~1677）等數學大家，都曾經給出切線問題的部分解答，甚至笛卡兒在 1637 年說過切線問題是他一生中所知道的最有用和最具一般性的幾何問題，也是他一生中最渴望瞭解的問題([1])。顯見在十七世紀中對這項問題的重視程度。之後，首次全面性的解決切線問題還是要歸功於牛頓（1642~1727）和萊布尼茲（1646~1716）。

原先用微分概念來求一個函數圖形上一點的斜率，得到了在此點圖形的切線，使得切線問題獲得初步的瞭解，對於以方程式呈現的曲線，須經適當的工具當媒介，始能全盤性的瞭解曲線的切線，這就跟合成函數微分性質的連鎖規則（或稱連鎖律(The Chain Rule)）有密切的關係，而連鎖規則除了能大大拓廣可微分函數的對象，其另外的功能如隱函數微分法與相關變率的問題更是包括在它的應用範圍。本文參照最新版本的微積分教科書（含參考資料[1]， [2]， [3]），綜合找出最直觀嚴謹的初等證法，進而舉出其應用範例，提供微積分教學的參考。

*為本文通訊作者

貳、連鎖規則的直觀看法

假設你正準備開車去旅遊。已知每公升的汽油可行駛 12 公里,那麼你能行駛的總里程數是你的汽車油箱中汽油量的函數，若以 y 表示行駛的里程數，u 表示汽油公升數，則 y 是 u 的函數，或可記作 $y=f(u)$；假設當時的汽油價格是每公升 30 元，則加油的數量是汽油費用的函數，若以 x 表示花在汽油的費用，那麼 $u=g(x)$。現在每公升行駛 12 公里，是行駛里程數對汽油用量的變率，因此

$$f'(u)=\frac{dy}{du}=12\text{ 公里/公升。}$$

同樣地，因汽油每公升 30 元，每塊錢的花費讓你使用 $\frac{1}{30}$ 公升的汽油，故

$$g'(x)=\frac{du}{dx}=\frac{1}{30}\text{公升/元}。$$

綜合起來，行駛的里程數也是汽油費用的函數，這樣的結果可用 g 與 f 的合成函數來呈現：

$$y=f(u)=f(g(x))。$$

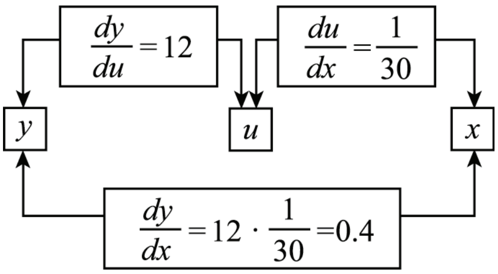
如果你想知道每塊錢能行駛多少里程，亦即求 $\frac{dy}{dx}$，直覺來看可把它們的變率相乘起來，即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$=\frac{12\text{公里}}{1\text{公升}}\cdot\frac{1\text{公升}}{30\text{元}}$$

$$=\frac{12\text{公里}}{30\text{元}}=0.4\text{公里/元}$$

上式的結果亦可用如下的簡圖來顯示：



圖(1)

這裡似乎蘊藏著中間上下的「 du 」可以忽略掉或甚至約掉，當然本例中 $du\neq 0$ ，這樣子想是沒問題的，轉換至一般的問題，當 $du\neq 0$ 可能會產生 $du=0$ 那就產生一些麻煩！為了避免這些麻煩，就須多花點心思來處理！

參、連鎖規則的簡易初等證明與運算實例

各初等微積分的版本都會或補充給予連鎖規則詮釋外的理論證明([1]， [2]，[3])，但幾乎每種證法都有不少的難度或很難想像到的技巧。底下是我們綜合各個方法幾乎是最簡易的證法。

定理 1

假設 $y=f(u)$ 是 u 的可微分函數，$u=g(x)$ 是 x 的可微分函數，則合成函數 $y=f\circ g(x)$ 是 x 的可微分函數且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

亦即 $\frac{d}{dx}\big(f(g(x)\big)=f'(g(x))g'(x)$

在給予正式證明之前，考慮 $x=c$ 且 $g(x)\neq g(c)$ ，$\forall x\neq c$，注意到可微分一定連續，故 $\lim\limits_{x\to c}g(x)=g(c)$ ，如果 $g(x)\neq g(c)$ ，$\forall x\neq c$ ，那麼

$$y'(c)=\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)}\cdot\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

$$=\lim_{x\to c}\frac{f(g(x))-f(g(c))}{g(x)-g(c)}\cdot\lim_{x\to c}\frac{g(x)-g(c)}{x-c}$$

$$=f'(g(c))g'(c)。$$

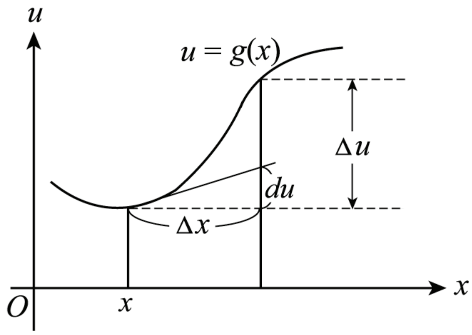
上式的推論中有 $g(x)\neq g(c)$，$\forall x\neq c$ 的假設，否則在數學上就不可以這樣的處理，當然為了記得這個規則，一開始這樣假設是有助於連鎖規則的瞭解。以下給予

正確完整的證明。

定理 1 的證明：

由示意圖(2)，$u=g(x)$ 在 x 可微分，即

$$g'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\ ,$$



圖(2)

即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}-g'(x)\right)=0\ ,$$

令

$$\varepsilon_1(\Delta x)=\begin{cases}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-g'(x), & \Delta x\neq 0;\\ 0 & ,\ \Delta x=0.\end{cases}$$

則得

$$\Delta u-g'(x)\Delta x=\left(\varepsilon_1(\Delta x)\right)\cdot\Delta x$$

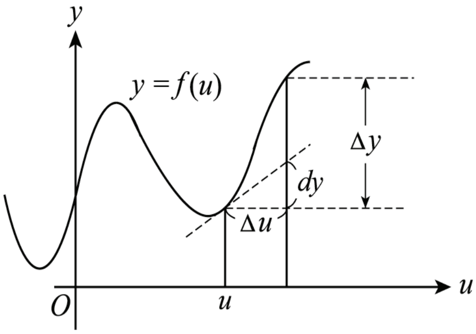
且 $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1(\Delta x)=0$，故得

$$\begin{aligned}\Delta u&=g'(x)\Delta x+\varepsilon_1(\Delta x)\Delta x\\&=\left(g'(x)+\varepsilon_1(\Delta x)\right)\Delta x\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)\end{aligned}$$

同理，如示意圖(3)知

$$\Delta y=\left(f'(u)+\varepsilon_2(\Delta u)\right)\Delta u\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

其中 $\lim_{\Delta u\to 0}\varepsilon_2(\Delta u)=0$ ，$\varepsilon_2(0)=0$ ，



圖(3)

綜合(2)，(3)得

$$\begin{aligned}\Delta y&=\left(f'(u)+\varepsilon_2(\Delta u)\right)\left(g'(x)+\varepsilon_1(\Delta x)\right)\Delta x\cdots(4)\\&=[f'(u)g'(x)+f'(u)\varepsilon_1(\Delta x)+g'(x)\varepsilon_2(\Delta u)+\\&\quad\varepsilon_2(\Delta u)\varepsilon_1(\Delta x)]\Delta x\end{aligned}$$

故知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)g'(x)+f'(u)\varepsilon_1(\Delta x)+g'(x)\varepsilon_2(\Delta u)$$

$$+\varepsilon_2(\Delta u)\varepsilon_1(\Delta x)\ ,\ \Delta x\neq 0$$

另由 $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1(\Delta x)=0$ ，

$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$ ($\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2(\Delta u)=0$)，於是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)g'(x)+f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_1(\Delta x)$$

$$+g'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2(\Delta u)+\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_2(\Delta u)\varepsilon_1(\Delta x)$$

$$=f'(u)g'(x)+f'(u)\cdot 0+g'(x)\cdot 0+0\cdot 0$$

$$=f'(u)g'(x)\ 。$$

討論：

上面的證明最值得注意的是(2)，(3)兩式，以及合併(2)，(3)兩式的(4)式就可輕易得到證明。

推論 1-1：

設 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$ 為三個可微分函數，則 $y=f\circ g\circ h(x)$ 亦為可微分函數且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

亦即

$$\frac{d}{dx}[f(g(h(x)))]$$
$$=f'(g(h(x)))\cdot g'(h(x))\cdot h'(x)$$

證明：

這是連續用兩次連鎖規則的結果

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}\text{。}$$

底下看看一些連鎖規則運算的範例。

範例 1

若 u 為 x 的可微分函數，n 為整數，

則 $\frac{d}{dx}\left(u^n\right)=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$，

此乃 $\frac{d}{dx}u^n=\frac{d}{du}\left(u^n\right)\cdot\frac{du}{dx}=nu^{n-1}\frac{du}{dx}$

（此式在 $n-1<0$ 時，須 $u\neq 0$）

因此

$$\frac{d}{dx}(x+1)^6=6(x+1)^5\frac{d}{dx}(x+1)=6(x+1)^5$$

所以

$$\int_0^1(x+1)^5\,dx=\frac{1}{6}(x+1)^6\Big|_0^1=\frac{1}{6}\left(2^6-1^6\right)=\frac{63}{6}$$

範例 2

因為 $\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x>0)$，

$\frac{d}{dx}(x^2+1)=2x$，

故 $\frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+1)$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$，

所以 $\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1=\sqrt{2}-1$

範例 3

因 $\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x>0)$，

$\frac{d}{dx}(a^2-x^2)=-2x$，

故

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)$$

$=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$，$|x|<a$

範例 4

因 $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\ (x\neq 0)$，

$\frac{d}{dx}x^2=2x$，$\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right)=2x+1$，

故 $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^4}}\cdot 2(x^2+x+1)\cdot(2x+1)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4x+2}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}$$，

所以

$$\int_0^1\frac{1}{3}\cdot\frac{4x+2}{\sqrt[3]{x^2+x+1}}dx=\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}\Big|_0^1$$

$$=\sqrt[3]{9}-1$$

範例 5

因 $\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$ ，

$\frac{d}{dx}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\ (x>0)$ ，

$\frac{d}{dx}\left(x^4+1\right)=4x^3$ ，

故 $\frac{d}{dx}\sin\sqrt{x^4+1}$

$$=\left(\cos\sqrt{x^4+1}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+1}}\frac{d}{dx}\left(x^4+1\right)$$

$$=\left(\cos\sqrt{x^4+1}\right)\cdot\frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$$

肆、連鎖規則在求隱微分法上的應用

上節的範例中，函數都以顯明形式來表示，例如方程式 $y=\sqrt{x^2+1}$ ， $y=\sqrt{1-x^2}$ 等等都為顯函數形式。但有些函數只是隱藏在某一方程式中，例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 等都是隱藏在方程式 $x^2+y^2=1$ 中，如果要在 $x\neq\pm1$ 下求 $\frac{dy}{dx}$，可以先把 y 以 x 明顯的表示出來再微分。

隱函數形式	$x^2+y^2=1$
顯函數形式	$y=\sqrt{1-x^2}$ 或 $y=-\sqrt{1-x^2}$
導函數	$\frac{dy}{dx}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(x\neq\pm1)$ 或 $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\quad(x\neq\pm1)$

這裡要注意的是：當 (x,y) 在圓上， y 正時，取 $y=\sqrt{1-x^2}$ ， 而 y 負時，則取 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 。但在很多的方程式中，例如 $x^2-2y^3+4y=1$ ， 如果以 x 表示 y 時，將會碰到很大的麻煩，就要以其它方式求其導函數。

首先，我們要對 x 作微分，所以微分對象只涉及 x 的話，那方法如上節範例一點困難都沒有，但是一旦要微分 y 的話，由於 y 其實是一個隱含可定義的可微分函數，那就需要用到連鎖規則來處理；這種微分過程就稱為隱微分法。

範例 6（對 x 微分）

(1) $\frac{d}{dx}\left(x^3\right)=3x^2$

(2) $\frac{d}{dx}\left(y^3\right)=3y^2\frac{dy}{dx}$

(3) $\frac{d}{dx}(2x-3y)=2-3\frac{dy}{dx}$

(4) $\frac{d}{dx}\left(xy^2\right)=x\frac{d}{dx}\left(y^2\right)+y^2\frac{d}{dx}(x)$

$=x\left(2y\frac{dy}{dx}\right)+y^2(1)=2xy\frac{dy}{dx}+y^2$

在作進一步的範例前，先設好隱微分法的指導原則：

> (1) 將含有 x, y 關係式（方程式）左右兩邊同時對 x 微分。
>
> (2) 將含有 $\frac{dy}{dx}$ 的所有項移到式子的左邊，而把其它項都移到式子的右邊。
>
> (3) 左邊提出 $\frac{dy}{dx}$。
>
> (4) 把式子左邊不含 $\frac{dy}{dx}$ 的項移到右邊，解出 $\frac{dy}{dx}$（當然式子左邊不可為 0）。

範例 7

已知 $x^2+y^2=25$， 求 $\frac{dy}{dx}$。

解：

(1) $\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}(25)$，

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$

(2) $2y\frac{dy}{dx}=-2x$

(3) $y\frac{dy}{dx}=-x$

(4) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\quad(y\neq 0)$

由範例 7 可知用隱函數微分法比直接求 $\frac{d}{dx}\left(\pm\sqrt{25-x^2}\right)$還簡便得多！一般的二次曲線如拋物線、橢圓，雙曲線也都可以用隱函數微分法求得過二次曲線上一點的切線斜率，因此也就可以求得二次曲線上一點為切點的切線了！

範例 8

求圖形 $x^2+4y^2=4$ 以 $\left(\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$為切點的切線斜率。

解：

(1) $\frac{d}{dx}\left(x^2+4y^2\right)=\frac{d}{dx}(4)$，

$2x+8y\frac{dy}{dx}=0$

(2) $8y\frac{dy}{dx}=-2x$， $4y\frac{dy}{dx}=-x$

(3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$，

(4) 故以 $\left(\sqrt{2},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$為切點的切線斜

率為 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{2}}{4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{2}$

範例 9

求 $3\left(x^2+y^2\right)^2=100xy$ 的圖形以 $(1,3)$ 為切點的切線斜率。（此曲線為雙紐線 (Lemniscate)）

解：

(1) $\frac{d}{dx}\left[3\left(x^2+y^2\right)^2\right]=\frac{d}{dx}[100xy]$，

$3(2)\left(x^2+y^2\right)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right)$

$=100\left[x\frac{dy}{dx}+y(1)\right]$

(2) $12y\left(x^2+y^2\right)\frac{dy}{dx}-100x\frac{dy}{dx}$

$=100y-12x\left(x^2+y^2\right)$

(3) $\left[12y\left(x^2+y^2\right)-100x\right]\frac{dy}{dx}$

$=100y-12x\left(x^2+y^2\right)$

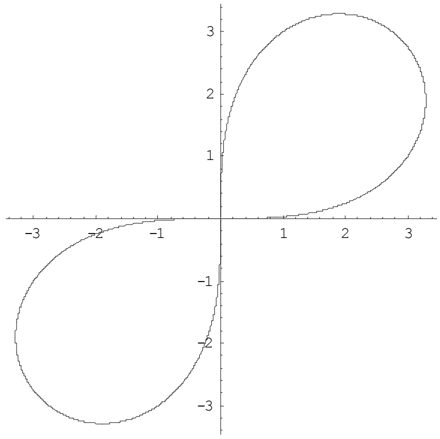
(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{100y-12x\left(x^2+y^2\right)}{-100x+12y\left(x^2+y^2\right)}$

$=\frac{25y-3x\left(x^2+y^2\right)}{-25x+3y\left(x^2+y^2\right)}$

(5) 以 $(1,3)$ 為切點的切線斜率為

$\frac{dy}{dx}=\frac{25\cdot 3-3\cdot 1\cdot\left(1^2+3^2\right)}{-25(1)+3(3)\left(1^2+3^2\right)}$

$=\frac{75-30}{-25+90}=\frac{45}{65}=\frac{9}{13}$



範例 10

求笛卡兒葉形線(Folium of Descartes) $x^3+y^3-6xy=0$ 在點 $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$ 的斜率。

解：

(1) $\frac{d}{dx}\left(x^3+y^3-6xy\right)=0$，

$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-6y-6x\frac{dy}{dx}=0$

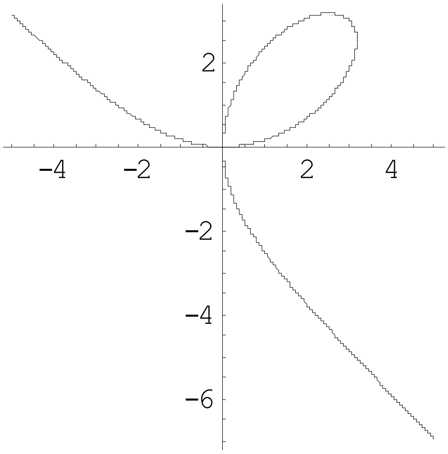
(2) $3y^2\frac{dy}{dx}-6x\frac{dy}{dx}=6y-3x^2$

(3) $\left(3y^2-6x\right)\frac{dy}{dx}=6y-3x^2$，

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{6y-3x^2}{3y^2-6x}=\frac{2y-x^2}{y^2-2x}$，

(5) 在點 $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$ 的斜率為

$\frac{dy}{dx}=\frac{2\left(\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{\frac{16}{3}-\frac{16}{9}}{\frac{64}{9}-\frac{8}{3}}=\frac{4}{5}$



範例 11

當 n 為有理數時，求證：

$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=nx^{n-1}$ 。

解：

令 $n=\frac{q}{p}$ ， p,q 為整數， $p>0$ ，因為 $y=x^n=x^{\frac{q}{p}}$ ， 所以 $y^p=x^q$，利用隱微分法將上式兩邊對 x 微分：

$$py^{p-1}\frac{dy}{dx}=qx^{q-1}\text{ ，}$$

故得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{q}{p}\cdot\frac{x^{q-1}}{y^{p-1}}=\frac{q}{p}\cdot\frac{x^{q-1}}{(x^{\frac{q}{p}})^{p-1}}=\frac{q}{p}x^{\frac{q}{p}-1}\text{ ，}$$

得證。

配合範例 11，範例 4 可計算如下：

$$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)^2}=\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{2}{3}}$$

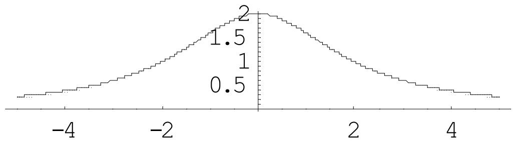
$$=\frac{2}{3}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\left(2x+1\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{4x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+x+1\right)}}$$

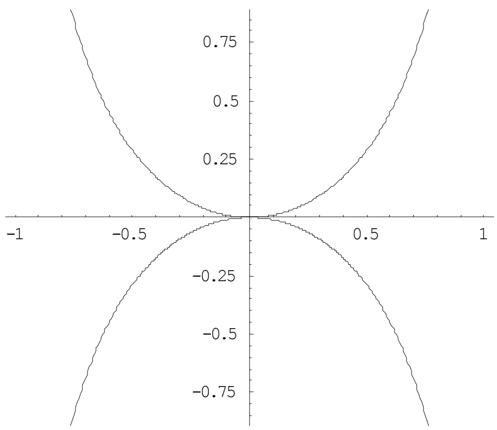
答案完全一致。

結束本節之前提供幾個有趣的例子供作練習：

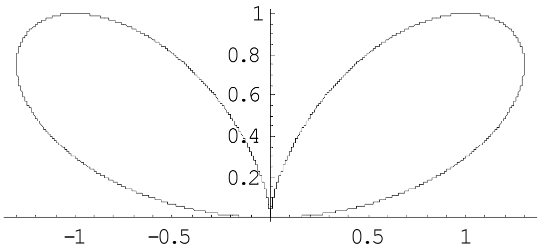
1. 求艾妮絲箕舌線(Witch of Agnesi) $\left(x^2+4\right)y=8$ 在點 $(2,1)$ 的斜率。(參考答案： $-\frac{1}{2}$)



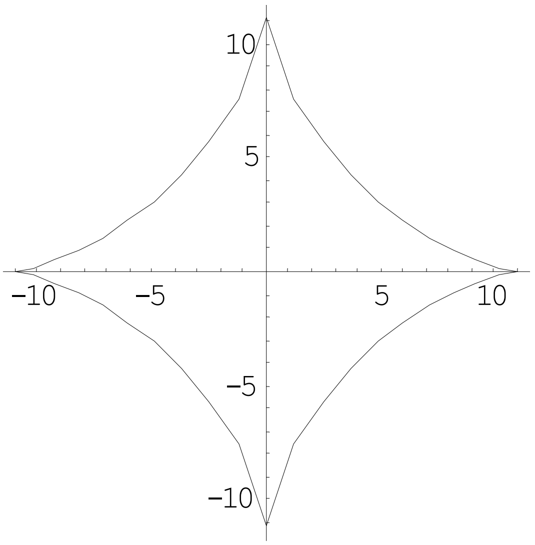
2. 求巴洛 κ 曲線(Kappa curve of Barrow) $x^2\left(x^2+y^2\right)=y^2$ 在點 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 的斜率。(參考答案：3)



3. 求雙葉線(Bifolium) $\left(x^2+y^2\right)^2=4x^2y$ 在點 $(1,1)$ 的斜率。(參考答案:0)



4. 求星形線(Astroid) $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5$ 在點 $(8,1)$ 的斜率。(參考答案:$-\frac{1}{2}$)



伍、連鎖規則在求相關變率上的應用

在上段中我們介紹了利用連鎖規則,以隱微分法求 $\frac{dy}{dx}$, 另一個連鎖規則的重要應用是求出兩個或多個與時間同時改變的變數間的變率。例如:當水從一個倒立正圓錐形槽底流出時,存水的體積 V, 水面的半徑 r 和高度 h 都是時間 t 的函數。已知這三個變數之方程式為

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h,$$

以隱微分法可求它們之間的相關變率的方程式。

$$\frac{d}{dt}(V)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi}{3}r^2h\right),$$

$$\frac{dV}{dt}=\frac{\pi}{3}\left[r^2\frac{dh}{dt}+h\left(2r\frac{dr}{dt}\right)\right]=\frac{\pi}{3}\left(r^2\frac{dh}{dt}+2rh\frac{dr}{dt}\right)。$$

因此可知 V 的變率與 h, r 各自變率有關。

再看底下有關相關變率的範例。

範例 12

設 x 和 y 都是 t 的可微分函數且滿足 $y=x^3$。已知 $x=1$ 時 $\frac{dx}{dt}=2$,求 $x=1$ 時的 $\frac{dy}{dt}$。

解:

(1) $\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}x^3=3x^2\frac{dx}{dt}$

(2) $\frac{dy}{dt}=3\cdot1^2\cdot2=6$

範例 13

一個物體以順時針沿著單位圓 $x^2+y^2=1$ 運動。已知當它經過點 $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 時,其 y 坐標對時間的變率

正在以每秒 3 單位減少，試求此時其坐標對時間的變率為何？

解：

本問題相當於：在已知 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{dy}{dt}=-3$，求在 $x^2+y^2=1$ 的條件下之 $\frac{dx}{dt}=?$ 為此，在 $x^2+y^2=1$ 兩邊對 t 作隱微分：

$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

得 $\frac{dx}{dt}=-\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$。

以 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $\frac{dy}{dt}=-3$ 代入

得 $\frac{dx}{dt}=\left(-\sqrt{3}\right)\times\left(-3\right)=3\sqrt{3}$，

$\frac{dx}{dt}$ 為正值，表 x 坐標正在增加。

範例 14

以每分鐘 4 立方呎的速度將氣球充氣。當半徑是 2 呎時，求半徑對 t 的變率。

解：

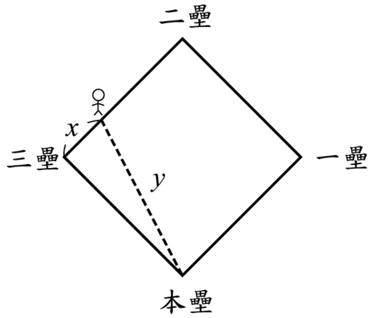
以 V 表氣球體積，r 表半徑；已知變率：$\frac{dV}{dt}=4$（固定變率），求出：當 $r=2$ 時的 $\frac{dr}{dt}$。首先找出 V 與 r 之間的關係式，方程式：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，兩邊同時對 t 作隱微分得：$\frac{dV}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}$，故 $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}$，最後以 $r=2$，$\frac{dV}{dt}=4$ 代入得 $\frac{dr}{dt}=\frac{1}{4\pi\cdot 2^2}\cdot 4=\frac{1}{4\pi}$ 呎/分。

範例 15

棒球場上的四個壘包分別在邊長 90 呎的正方形頂點上，假設一個已在二壘的選手試圖盜上三壘，已知他在離三壘 20 呎時，他的速度是每秒 30 呎。試問此選手跟本壘間的距離變率為何？

解：

設 t 表該選手自二壘跑到三壘的秒數，x 表該選手距三壘的呎數，y 表該選手距本壘的呎數，示意圖如下。



已知 $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=20}=-30$ 呎/秒，要求 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20}=?$

為此，先列出 x, y 的方程式

$$x^2+90^2=y^2$$

兩邊對 t 作隱微分得：

$$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt}$$

即得 $\frac{dy}{dt}=\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$，當 $x=20$ 時，

$y=\sqrt{20^2+90^2}=\sqrt{8500}=10\sqrt{85}$，

代入得

$$\begin{aligned}&\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20}\\&=\frac{20}{10\sqrt{85}}(-30)\\&=-\frac{60}{\sqrt{85}}\approx-6.51\text{呎}/\text{秒}。\end{aligned}$$

以上負值表二壘跑向三壘時，他跟本壘的距離正在減少之中；反觀，若從一壘跑向二壘時，同樣的狀況可列出

$y^2=90^2+(90-x)^2$，

$2y\frac{dy}{dt}=2(90-x)\left(-\frac{dx}{dt}\right)$，

$\frac{dy}{dt}=\left(-\frac{90-x}{y}\right)\left(\frac{dx}{dt}\right)$， 當 $x=20$ 時，

$y^2=8100+4900=13000$， $y=10\sqrt{130}$ ，

故 $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=20}=-\frac{70}{10\sqrt{130}}(-30)=\frac{210}{\sqrt{130}}\approx18.38$ 呎/秒，此時顯示盜壘者跟本壘間的距離較快速的增加，相較之下，盜二壘成功的機會比二壘盜三壘的增加很多，符合棒球比賽現場的實況。

陸、結論

本文給出連鎖規則的直觀意義，及簡易的初等證明與運算實例，並舉例說明它在隱微分法及相關變率上的重要應用範例，能大大的增廣微積分的應用範圍。

參考資料

[1] Larson, Edwards：Calculus (9th ed.)，歐亞書局有限公司代發行。
[2] Howard, Bivens, Davis：Calculus (9 th ed.), 華泰文化事業股份有限公司代發行。
[3] Salas, Hille, Etgon：Calculus (8 th ed.), 歐亞書局有限公司代發行。