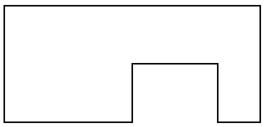
中學生通訊解題第七十七期題目解答與評註

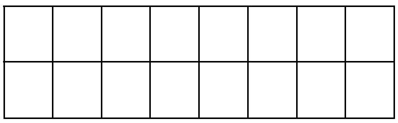
臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
7701

將”圈”定義為一條封閉折線，且這條折線的邊均由如圖二方格中的邊組成，且折線經過的任意一個方格頂點都只與折線的兩條邊相連如圖一所示。求在如圖二所示的 的方格中圈的個數。



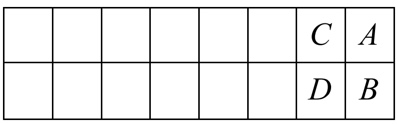
圖一



圖二

參考解答：

定義某個圈在方格水平方向的投影長為這個圈的長度,設 表 的方格中圈長為 的個數。



這些圈中至少包含了 A,B 方格中的一個，可得

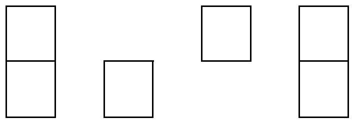
$a_k=$ (含 A 不含 B)+(含 B 不含 A)+(含 A 且含 B)

= [(含 C 不含 D)+(含 C 且含 D)]+[(含 D 不含 C)+(含 C 且含 D)]+[(含 C 不含 D)+(含 D 不含 C)+(含 C 且含 D)]

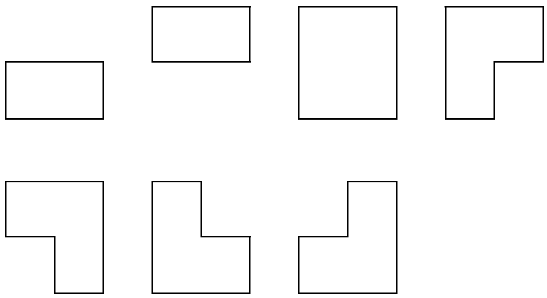
= 2[(含 C 不含 D)+(含 D 不含 C)+(含 C 且含 D)]+(含 C 且含 D)

= $2a_{k-1}+a_{k-2}$

又 a_1 表 2×2 的方格中圈長為 1 的個數，可得 $a_1=3$，如下：



a_2 表 2×2 的方格中圈長為 2 的個數，可得 $a_2=7$，如下：



因此，

$2a_3=2a_2+a_1=17$， $2a_4=2a_3+a_2=41$，

$2a_5=2a_4+a_3=99$， $2a_6=2a_5+a_4=239$，

$2a_7=2a_6+a_5=577$， $2a_8=2a_7+a_6=1393$，

$2a_3 = 2a_2 + a_1 = 17$

故 2×8 的方格中圈的個數為

$$8a_1 + 7a_2 + 6a_3 + 5a_4 + 4a_5 + 3a_6 + 2a_7 + a_8$$
$$= 8\times3 + 7\times7 + 6\times17 + 5\times41 + 4\times99 + 3\times2$$
$$= 4040$$

問題編號

7702

將一個四位數的四個數字順序顛倒，然後與原數相加。若相加所得到的數能被 77 整除，則稱這個原來的四位數字為好數，求所有的四位數中，有多少個好數。

參考解答：

設原來的四位數字為[*abcd*]，其中 $a \neq 0$，則順序顛倒後得到[*dcba*]，

令 *S*=[*abcd*]+ [*dcba*]，

則 *S*=1001(*a*+*d*)+110(*b*+*c*)，

又 7｜1001＝7×11×13 ⇔ 7｜(*b*+*c*)，

故 *b*+*c*=0, 7, 14，

(*b*+*c*)可能情形如下：

(0,0),(0,7),(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1),(7,0),(5,9),(6,8),(7,7),(8,6),(9,5)

計 14 種，

故(*b*,*c*),*a*,*d* 的可能情形共有 14×9×10=1260 種，即四位數中共有 1260 個好數。

問題編號

7703

試求：滿足方程式 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2010}$ 所有正整數對(x,y)的個數。

參考解答：

【參考解答 1】

1. 因為 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2010}$，且 x,y 均為正整數，
   所以 $x > 2010$, $y > 2010$
2. 令 $x = 2010+a$、$y=2010+b$
   所求即為正整數對(a,b)的個數
3. 將 $x = 2010+a$、$y=2010+b$ 代入
   $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2010}$，得到 $2010^2 = ab$
   一旦 a 決定後，b 就跟著被決定
   因此正整數對(a,b)的個數即為正整數 a 的個數
   也就是轉化成 2010^2 的**正因數**個數即可
4. 質因數分解 $2010^2 = 2^2\times3^2\times5^2\times67^2$
   可以得到 2010^2 的**正因數個數**為
   $(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)=81$
   因此，所求即為 81 組。

【參考解答 2】

1. 因為 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2010}$，且 x,y 均為正整數，
   所以 $x > 2010$, $y > 2010$

2. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2010}$

$\Rightarrow 2010y+2010x=xy$

$\Rightarrow xy\text{-}2010x\text{-}2010y=0$

一旦 $x-2010$ 確認後，$y-2010$ 就跟著被決定

因此正整數對(x,y) 的個數即為正整數 $x-2010$ 的個數

也就是轉化成 2010^2 的**正因數**個數即可

3. 質因數分解 $2010^2=2^2\times3^2\times5^2\times67^2$

可以得到 2010^2 的**正因數個數**為

$(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)=81$

因此，所求即為 81 組。

解題評註：

本題關鍵在於如何將棘手的分式轉化成熟悉的因式分解型態，再搭配質因數分解即可。這樣的解題方法，常見於數論的領域中，是很好的代數與數論訓練題。

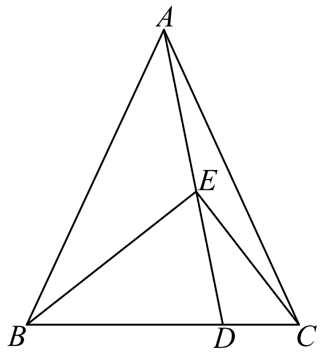
於徵答的 19 位同學中，大部分均能使用上述的方式解題，但有很多同學都敘述著『2010^2 的**因數個數**為$(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)=81$ 個。』事實上，這樣的敘述是有問題的，畢竟因數包含了正因數與負因數，所以『2010^2 的**因數個數**為 $2\times(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)=162$ 個。』或者『2010^2 的**正因數個數**為$(2+1)(2+1)(2+1)(2+1)=81$ 個。』才是正確的敘述。或許是國中階段的因數指的是正數，或許沒有很強調負因數，所以此次評分時均未被扣分，往後在進行類似的說明計算時要特別留意。

張同學使用窮舉法(枚舉法)，將 2010^2 拆解成 81 組的正因數乘積，事實上這樣的作法是合理且具有實驗的精神與價值，也是養成細心思考的好方法，但萬一少或多列了幾組，將造成答案的錯誤。建議思考如何直接導出 2010^2 的正因數個數，如此更能提升數學的理解能力與歸納統整的思考能理。

黃同學最後有列舉出 81 組解的型態進行檢驗，且表示法頗具有電腦程式語言的演算法之架構，若有機會接觸程式語言，可以試著以電腦將 81 組解全部跑出來，這是很好訓練程式語言的方法。

問題編號
7704

在△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$ 是底邊 $\overline{BC}$ 上一點，E 是線段 $\overline{AD}$ 上一點，且$\angle BED=2\angle CED=\angle A$，求證：$\overline{BD}=2\overline{CD}$。



參考解答：

作△ABC 的外接圓，延長 $\overline{AD}$ 交圓於 F，連 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CF}$ ，作 $\overline{EG} \perp \overline{BF}$ ，則有$\angle AFC = \angle ABC = \angle ACB = \angle AFB$

已知$\angle BEF = \angle BAC \Rightarrow \angle EBF = \angle EFB$

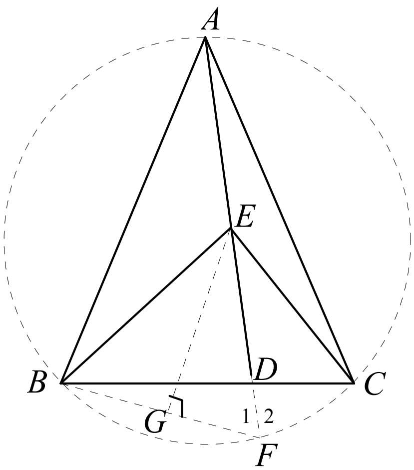
$\therefore\ \overline{EB} = \overline{EF} \Rightarrow \overline{BG} = \overline{GF}$

已知$\angle CEF = \frac{1}{2}\angle BEF = \angle FEG$， $\overline{EF} = \overline{EF}$

$\therefore \triangle EGF \cong \triangle ECF$ (ASA 相似)

$\Rightarrow\ \overline{FC} = \overline{FG} = \frac{1}{2}\overline{BF}$ ，$\angle 1 = \angle 2$

$\therefore \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BF}}{\overline{CF}} = 2$ ， $\overline{BD} = 2\overline{DC}$



解題評註：

這是一個多種解法的幾何問題，可以作輔助線，利用全等、相似三角形的性質，最後由角平分線性質完成證明；也可以畫輔助圓，再利用全等角形性質、對同弧的圓周角相等性質，最後由角平分線性質完成證明。上面的解法僅供各位參考。

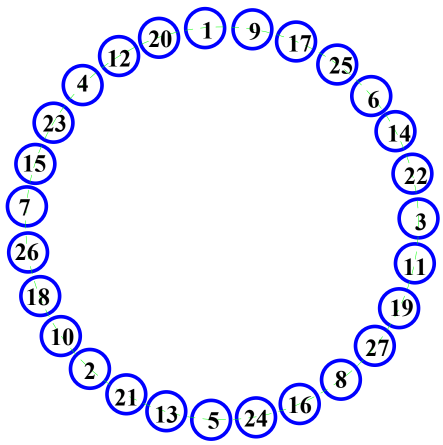
問題編號
7705

以 1,2,3,⋯,25,26,27 這 27 個數中，最多可以選出多少個數，使它們中任意兩個數之差既不等於 8，也不等於 19。

參考解答：

13 個數。

1. 將這 27 個數依以下規則排成一圈：相鄰兩個數之差是 8 或是 19，按順時針方向 1 的旁邊放 9，9 的旁邊放 17，17 的旁邊放 25(兩個數之差是 8)，25 的旁邊放 6(兩個數之差是 19) ⋯(如圖)，從圓圈上的 27 個數中，每隔一個數選出一個，共可選出 13 個數，它們中任意兩個數之差既不等於 8，也不等於 19。



2. 另外，至多也只能選出 13 個數。先任意選定一個數，不妨設它是 1，在剩下的 26 個數中，與 1 相鄰的兩個數 9、20 不能再選，於是只剩下 24 個數，我們將這 24 個數按相鄰關係分成 12 組每組中最多只能再選一個數，所以在這個圓圈上最多只能選出 1＋12＝13 個數，它們之間之差既不等於 8，也不等於 19。先選數不是 1，則同樣處理。例如這 13 個數可以是 1,17,6,22,11,27,16,5,21,10,26,15,4，這種選法不是唯一的。

解題評註：

1. 題目中『最多可以選出多少個數』，所以答題有兩個重點：(1) 可以選出一組數滿足題意；(2) 這個個數是最多的。
2. 題目中『它們中任意兩個數之差既不等於 8，也不等於 19』，選了其中一個數，就有兩個數因此不能選，按照解法 1 的方法，可選出 13 個數滿足題意。這種選法不是唯一的。
3. 說明至多也只能選出 13 個數，如解法 2。一些同學沒有作答這個部份，或是作答不完整，應多注意這個部份，使個人的作答能完整。