利用線性變換證明三次函數陳朱洪性質

蕭健忠

國立臺南第一高級中學

壹、前言

2011 年 1 月 17、18、19 日三天，參加教育部高中數學學科中心在建國中學辦理 100 年度種子教師培訓課程。在最後一天研習課程，臺灣師大數學系朱亮儒教授演講「三次函數圖形的三個超額特徵」(朱亮儒、洪有情、陳昭地，2010)，提供給高中老師作為微積分的「三次函數圖形」的補充教材。這三個「超額特徵」中，第三個特徵「陳朱洪性質」最為別出心裁，性質敘述如下：

陳朱洪性質：

設 A 為函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 圖形上異於反曲點的任意一點，並設以 A 為切點的切線交曲線 Γ： $y=f(x)$ 於另一點 B，再以 B 為切點作 Γ 的切線交 Γ 另一點 C。若 R 表示 Γ 與切線 AB 所圍成區域的面積，而 S 為 Γ 與切線 BC 所圍成區域的面積，則 S=16R。

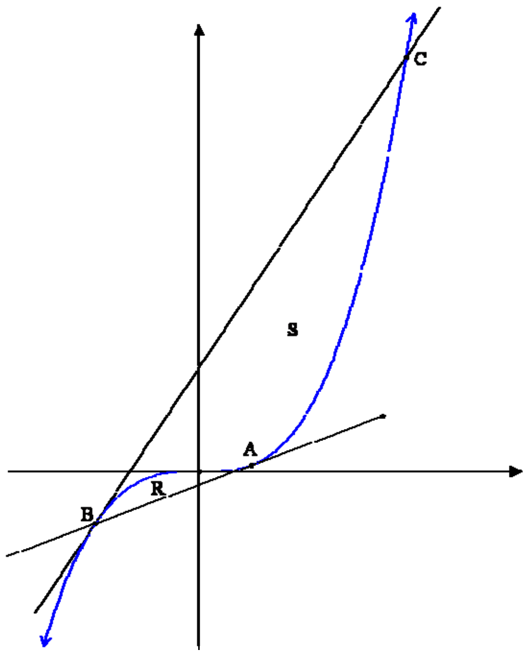
陳、朱、洪指的是陳昭地、朱亮儒與洪有情三位教授所採用的證明方法，是直接利用積分求兩區域的面積 (朱亮儒、洪有情、陳昭地，2010)。在朱教授的上課過程中，我一直在想為什麼是定值 16 倍？我隱隱約約覺得可能與平面的線性變換有關。這篇短文是想提供「陳朱洪性質」一個不同角度的看法，也是參加這次研習之後的心得報告。

貳、「陳朱洪性質」不同角度的看法

以下從最簡單情形開始，我們最終會討論到一般情形。

一、 $f(x)=x^3$ 的情形

朱教授的演講是從一個最簡化的函數 $f(x)=x^3$ 來討論，這裡延續這個歷程。設 $f(x)=x^3$ 而出發點為 A(1,1)，計算可得 B(-2,-8)、C(4,64)，如下圖：



因為猜想可藉由線性變換將區域 R 對應到區域 S，若將區域 R 中 x 坐標小於或等於 0 的部分稱為區域 R'，區域 S 中 x 坐標大於或等於 0 的部分稱為區域 S'，那麼這個線性變換也會將區域 R' 對應到區域 S'，而得到區域 S' 的面積是區域 R' 面積的 16 倍。利用積分求面積，因為直線 AB 的方程式為 y=3x-2，直線 BC 的方程式為 y=12x+16，所以

區域 S' 的面積= $\int_0^4 (12x+16-x^3)dx = 96$

區域 R' 的面積= $\int_{-2}^0 [x^3-(3x-2)]dx = 6$

果然區域 S' 的面積是區域 R' 面積的 16 倍，初步證實我們的猜想。

接下來就是找出這個線性變換。因為這個線性變換將 A(1,1)對應到 B(-2,-8)、將 B(-2,-8)對應到 C(4,64)，所以很容易找到線性變換 $T_1=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}$。再檢查曲線Γ在 A 到 B 這一段的對應，曲線Γ在 A 到 B 這一段上的任一點可以表式為(a,a^3)，$-2\le a\le 1$，因為

$$T_1\begin{bmatrix}a\\ a^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ a^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a\\ -8a^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a\\ (-2a)^3\end{bmatrix},$$

又 $-2\le -2a\le 4$，所以線性變換 T_1 將Γ在 A 到 B 這一段的點一對一對應到Γ在 B 到 C 這一段的點。

解決邊界部分的對應，我們可以知道線性變換 T_1 將區域 R 對應到區域 S，所以

$$S=R\times\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 0 & -8\end{vmatrix}=16R。$$

二、函數 $f(x)=ax^3+px$ 的情形

對於一般的三次函數，我們也想找出類似的變換。我們知道利用配方(橫向平移)，可以消去二次項，得到函數 $f(x)=ax^3+px+q$，先考慮 q=0 的情形，這是比較單純的狀況，因為此時我們希望找到的變換將(0,0)對應到(0,0)，是一個線性變換。

現在令函數 $f(x)=ax^3+px$，設 A(h , f(h))，計算可得 B(– 2h , f(– 2h))、C(4h , f(4h))，考慮平面上的線性變換 $T_2=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{bmatrix}$，由

$$T_2A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\ ah^3+ph\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2h\\ -8ah^3-2ph\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2h\\ f(-2h)\end{bmatrix}=B,$$

$$T_2B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2h\\ -8ah^3-2ph\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4h\\ 64ah^3+4ph\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4h\\ f(4h)\end{bmatrix}=C,$$

並且容易檢查 T_2 將Γ在 A 到 B 這一段的點一對一對應到Γ在 B 到 C 這一段的點。所以，線性變換 T_2 將區域 R 對應到區域 S，

故 S=R $\times\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{vmatrix}$=16R。

三、函數 $f(x)=ax^3+px+q$ 的情形

現在考慮 $q\neq0$ 的情形，這時候，不是線性變換了，還要加上平移。

對於三次函數 $f(x)=ax^3+px+q$，設 A(h , f(h))，可得 B(－2h , f(－2h))、C(4h, f (4h))，考慮平面變換

$T_3:R^2\to R^2$，定義

$$T_3\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 9q\end{bmatrix}$$

由 $$T_3A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\ ah^3+ph+q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 9q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2h\\ -8ah^3-2ph+q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2h\\ f(-2h)\end{bmatrix}=B,$$

$$T_3B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2h\\ -8ah^3-2ph+q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 9q\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4h\\ 64ah^3+4ph+q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4h\\ f(4h)\end{bmatrix}=C,$$

同前所述，T_3 將Γ在 A 到 B 這一段的點一對一對應到Γ在 B 到 C 這一段的點。所以，變換 T_3 將區域 R 對應到區域 S，因為平移不會影響面積，故 S=R $\times\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 6p & -8\end{vmatrix}$=16R。

四、函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的情形

最後，我們討論一般三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的情形。設 A(h , f(h))，可得 B($-2h-\frac{b}{a}$, f ($-2h-\frac{b}{a}$))、C($4h+\frac{b}{a}$, f($4h+\frac{b}{a}$))，考慮平面變換

$T_4:R^2\to R^2$，定義

$$T_4\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6c-\frac{2b^2}{a} & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}\\ 9d-\frac{bc}{a}\end{bmatrix},$$

由

$$T_4A=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 6c-\frac{2b^2}{a} & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}h\\ ah^3+bh^2+ch+d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\frac{b}{a}\\ 9d-\frac{bc}{a}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2h-\frac{b}{a}\\ -8ah^3-8bh^2-2ch-\frac{2b^2}{a}h+d-\frac{bc}{a}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2h-\frac{b}{a}\\ f(-2h-\frac{b}{a})\end{bmatrix}=B$$

同理可得 $T_4B=C$，所以 T_4 將就是我們要找的變換，它將區域 R 對應到區域 S，故

S=R $\times\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 6c-\frac{2b^2}{a} & -8\end{vmatrix}$=16R。

至此，我們利用平面變換證明了陳朱洪性質。

五、三次曲線上的點集合有加法的代數結構

設 P、Q 是Γ：$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 上的點，則直線 PQ(如果 P=Q，取切線)與曲線　有一個交點 R，定義 P+Q=R。設 P($x_1,f(x_1)$)、Q($x_2,f(x_2)$)，直線 PQ 的方

程式為 $y=\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}(x-x_1)+f(x_1)$，與 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 聯立求解，稍稍計算可求得另一交點坐標為 $(-(x_1+x_2+\dfrac{b}{a}),f(-(x_1+x_2+\dfrac{b}{a})))$，即為 R 的坐標。注意，如果 P、Q 是同一點，這個結果也是對的。整理成以下性質 1：

性質 1：設 P$(x_1,f(x_1))$、Q$(x_2,f(x_2))$是三次曲線$\Gamma: f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 上的兩個點，若 R=P+Q，則 R 的坐標為 $(-(x_1+x_2+\dfrac{b}{a}),f(-(x_1+x_2+\dfrac{b}{a})))$。

再將變換 T_4 加進來，有以下性質：

性質 2：T_4(P+Q)=T_4(P)+T_4(Q)。

證明：設 P$(x_1,f(x_1))$、Q$(x_2,f(x_2))$，由(四、函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的情形)，

$$P'=T_4(P)=(-2x_1-\frac{b}{a},f(-2x_1-\frac{b}{a}))\text{，}Q'=T_4(Q)=(-2x_2-\frac{b}{a},f(-2x_2-\frac{b}{a}))\text{，}$$

$$T_4(\mathrm{P})+T_4(\mathrm{Q})=P'+Q'=(-(-2x_1-\frac{b}{a}-2x_2-\frac{b}{a}+\frac{b}{a},f(-(-2x_1-\frac{b}{a}-2x_2-\frac{b}{a}+\frac{b}{a}))$$

$$=(2(x_1+x_2+\frac{b}{a})-\frac{b}{a},f(2(x_1+x_2+\frac{b}{a})-\frac{b}{a}))\ \ldots\ldots ①$$

若 R=P+Q，由前所述，R 坐標為 $(-(x_1+x_2+\dfrac{b}{a}),f(-(x_1+x_2+\dfrac{b}{a})))$，

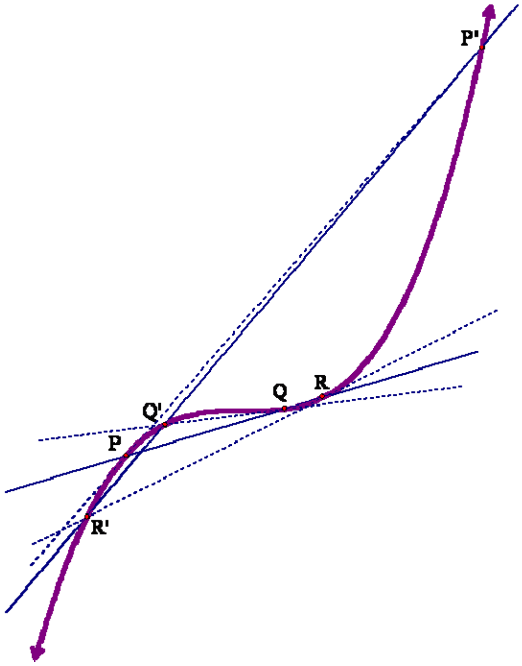
由(四、函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的情形)，

$$R'=T_4(R)=(-2(-(x_1+x_2+\frac{b}{a}))-\frac{b}{a},f(-2(-(x_1+x_2+\frac{b}{a}))-\frac{b}{a})$$

$$=(2(x_1+x_2+\frac{b}{a})-\frac{b}{a},f(2(x_1+x_2+\frac{b}{a})-\frac{b}{a})\ \ldots\ldots ②$$

比較①②，T_4(P+Q)= T_4(P)+ T_4(Q)，得證。

性質 2 的意義如下圖所示：以 P、Q 為切點的切線分別交三次曲線於點 P'、Q'，過 P、Q 的直線交三次曲線於點 R，過 P'、Q' 的直線交三次曲線於點 R'，則以 R 為切點的切線交三次曲線於點 R'。



六、修正

在(五、三次曲線上的點集合有加法的代數結構)中定義的加法不滿足群的條件，還好修正一下就可以了。假設 O 是曲線Γ： $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的反曲點，定義 P⊕Q 為 P+Q 關於反曲點 O 的對稱點。如此一來，(Γ, ⊕)就是一個加法群，反曲點 O 是此加法群的單位元素。

下面我們來檢查(Γ,⊕)是一個加法群。因為反曲點 O 的坐標為$(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$，利用性質 1，馬上得到 P⊕Q：

性質 3：設 P$(x_1,f(x_1))$、Q$(x_2,f(x_2))$是三次曲線Γ： $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 上的兩個點，

若 S=P⊕Q，則 S 的坐標為$(x_1+x_2+\frac{b}{3a},f(x_1+x_2+\frac{b}{3a}))$。

性質 4：(Γ,⊕)是一個加法群。

證明：設 P$(x_1,f(x_1))$、Q$(x_2,f(x_2))$、R$(x_3,f(x_3))$是三次曲線Γ： $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 上的任意三個點，且反曲點為 O$(-\frac{b}{3a},f(-\frac{b}{3a}))$，則

(1) P⊕O=O⊕P=$\left(x_1+(-\frac{b}{3a})+\frac{b}{3a}, f(x_1+(-\frac{b}{3a})+\frac{b}{3a})\right)$=P

(2) 設 P' 為 P 關於反曲點 O 的對稱點，因為三次曲線對稱於反曲點 O，所以 P' 也是Γ上一點，且 P' 坐標為$\left(-x_1-\frac{2b}{3a}, f(-x_1-\frac{2b}{3a})\right)$。

P⊕ P' =P⊕ P' =$\left(x_1+(-x_1-\frac{2b}{3a})+\frac{b}{3a}, f(x_1+(-x_1-\frac{2b}{3a})+\frac{b}{3a})\right)$=$\left(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a})\right)$=O；

即 P' 是 P 的加法反元素。

(3) P⊕Q=Q⊕P，很顯然。

(4) 最後驗證結合律：(P⊕Q)⊕R=P⊕(Q⊕R)。

$$(P\oplus Q)\oplus R=\left(x_1+x_2+\frac{b}{3a}, f(x_1+x_2+\frac{b}{3a})\right)\oplus R$$

$$=\left((x_1+x_2+\frac{b}{3a})+x_3+\frac{b}{3a}, f((x_1+x_2+\frac{b}{3a})+x_3+\frac{b}{3a})\right)$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3+\frac{2b}{3a}, f(x_1+x_2+x_3+\frac{2b}{3a})\right),$$

$$P\oplus(Q\oplus R)=P\oplus\left(x_2+x_3+\frac{b}{3a}, f(x_2+x_3+\frac{b}{3a})\right)$$

$$=\left(x_1+(x_2+x_3+\frac{b}{3a})+\frac{b}{3a}, f(x_1+(x_2+x_3+\frac{b}{3a})+\frac{b}{3a})\right)$$

$$=\left(x_1+x_2+x_3+\frac{2b}{3a}, f(x_1+x_2+x_3+\frac{2b}{3a})\right),$$

也很容易得證。所以，(Γ,⊕)是一個加法群。

肆、結語

區域 R 與 S 面積比為 16 這件事，原來可以利用三次函數上的變換 T_4 來解釋。這個變換是否還有其他有意思的應用？可能值得再進一步研究。

高中學生學習微積分，三次函數佔有主要地位。除了學會三次函數圖形作圖，三次函數圖形還有哪些性質？朱亮儒、洪有情、陳昭地三位教授費心的尋找這些有意思的「超額特徵」，使得高中微積分的內容更加豐富了，我想這也是三位教授的初衷。

參考資料

朱亮儒、洪有情、陳昭地(2010)：三次函數圖形的三個超額特徵。**科學教育月刊，第 335 期**，第 21-35 頁。