

「摺紙中學數學」之紅包花花

李政憲

新北市立林口國民中學

壹、前言

過完年後，不曉得你看到琳琅滿目的紅包袋，可曾想過它們的數學性質及應用？筆者今年蒐集了兩個女兒過年所拿到的紅包袋（如圖一），想到去年曾經帶過學生操作過相關的課程，並討論其中的數學；將所完成的作品送給兩個女兒被她們稱為「紅包花花」，在此簡單跟大家作分享相關作法與數學性質。

貳、傳統紅包袋長寬比討論

在變化之前，我們先討論紅包袋的長寬比，事實上我們將紅包袋封口摺入後，可以得到一個長寬比約 2：1 的長方形（目前的紅包袋花樣種類繁多，在此介紹主要以傳統尺寸的紅包袋為主），至於如何證明它，我們只要以摺紙的方式就可以簡單的作說明：

- 一、將封口摺入後的紅包袋長邊對摺（建議選取紙質較厚的紅包袋以利後續操作的成型，如圖二）
- 二、再沿左方（或右方）矩形的對角線對摺（如圖三）。

如何？簡單的兩個步驟，我們將原來的矩形對摺後成了重疊的兩個三角形，由於兩個三角形均為直角三角形，故對角線恰為其對稱軸，加上矩形的兩雙對邊等

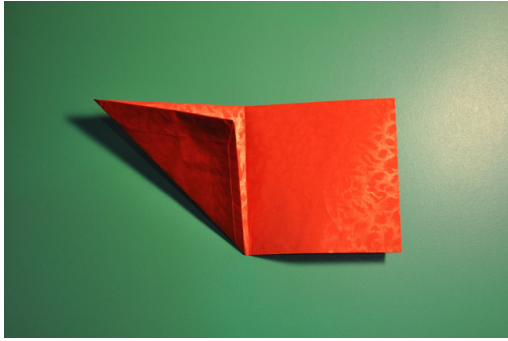
長，故這兩個直角三角形均為等腰直角三角形，攤開後即為正方形，也就是原紅包袋的長寬比為 2：1。（這裏的說明用到了一些包含的概念，事實上就筆者在課堂上的實際教學，由於多數的學生均有摺過色紙的經驗，所以對這個說明多半不需教師講解，一般靠自己摸索操作即可推得，教師的補充說明在此只是強調其數學性）



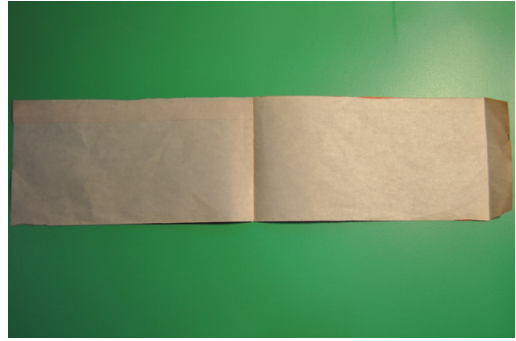
圖一、紅包袋列舉排列



圖二、封口摺入後的紅包袋長邊對摺



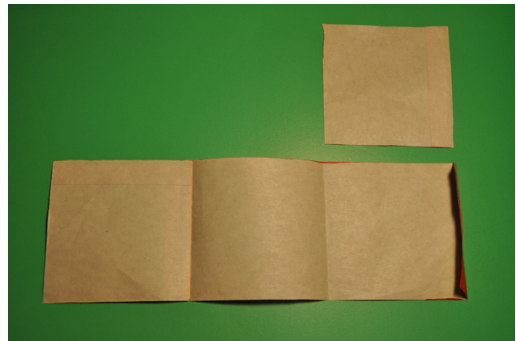
圖三、沿左方矩形的對角線對摺



圖四、長邊兩側割下後攤開

參、使用紙張裁切

接下來我們要作半破壞性的裁切，用刀片沿紅包袋長邊的兩側割下，在短邊底邊不割的前提下將紅包袋攤開，扣除封口後（請勿將封口割除，後續動作封口將有其用處）成了4：1的矩形（如圖四）。由於我們接下來需要的是3：1的矩形，所以透過以上步驟二摺對角線的方式，即可很容易的將一個正方形給割除（如圖五）。



圖五、長方形割除四分之一正方形

再來就是山谷摺機械式的操作了，先簡單介紹一下山摺與谷摺：

一、山摺：所謂的山摺，所指的是摺完後

呈現的形狀像山峰一樣（如圖六），繪製的直線通常以

——●●●——表示

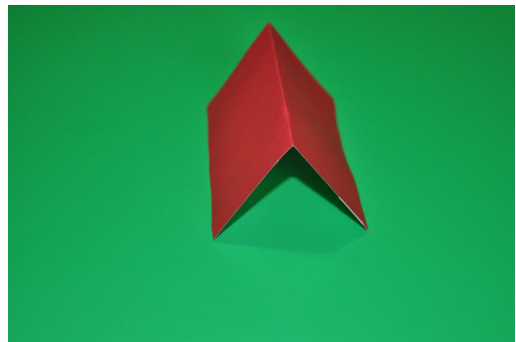
表示，我們稱它作山線。

二、谷摺：顧名思義，谷摺所表示的則是

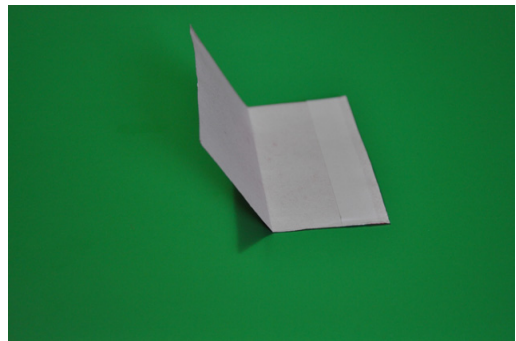
摺完後所呈現的形狀像山谷一般了（如圖七），繪製的直線通常以

——●●●——表示

表示，我們稱它為谷線。



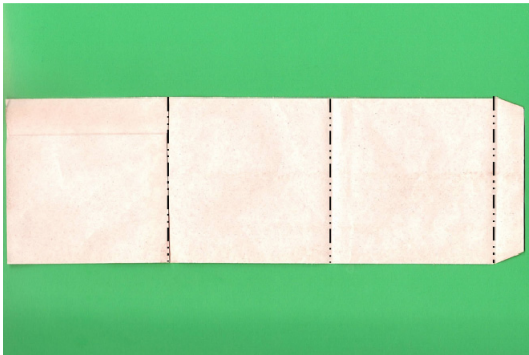
圖六、「山摺」圖示



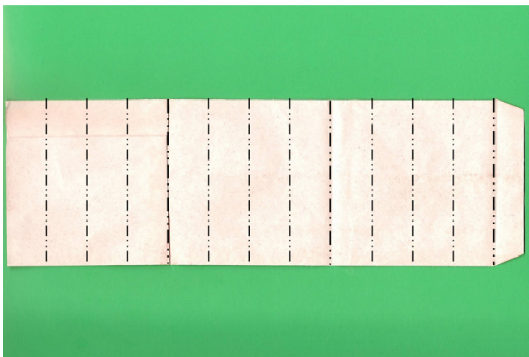
圖七、「谷摺」圖示

肆、山谷線介紹

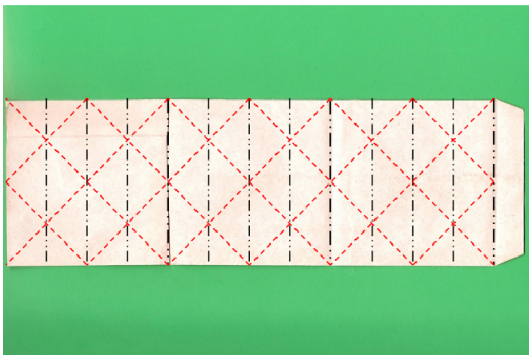
介紹完簡單的摺紙符號，將剛剛完成 3:1 的矩形白色面朝上，先摺出如圖中的山線（如圖八、九），再摺出如圖中的谷線（如圖十），所需的摺紙動作即大功告成。



圖八、山線完成（一）



圖九、山線完成（二）



圖十、谷線完成

伍、進階延伸思考

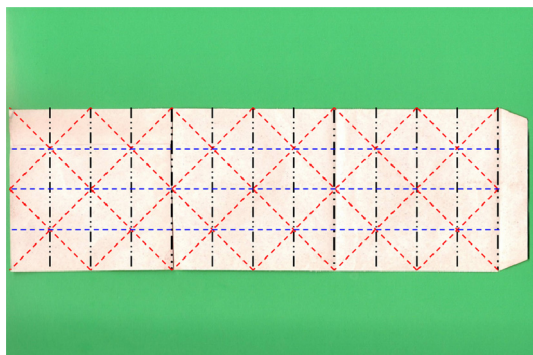
在還沒進行下一個動作之前，親愛的讀者不妨想想以下幾個數學問題：

一、圖中的直線所構成的三角形有幾種大小？是否均為等腰直角三角形？面積比為多少？

二、圖中共有幾個正方形？不同大小的三角形各有幾個？彼此的數量有關係嗎？是否可列出數學的一般式？

其中第一題的答案透過適當的切割即可得到共有八種面積不同的等腰直角三角形，面積比為 1:2:4:8:9:16:18:32，有趣的是若將這八種面積分成兩組 1:4:9:16 以及 2:8:18:32 的連比例式，第一組的各項為正整數 $1+2+\dots+n$ 等差級數的和，且第二組的各項恰為第一組的兩倍。

至於第二題的正方形，可透過等差數列 $4+3\times 4=16$ （個）得到；而三角形則均為等腰直角三角形，面積為 1 的共 24 個，面積為 2 的共 48 個，面積為 4 的共 24 個，面積為 8 的共 22 個，面積為 9 的共 12 個，面積為 16 的共 12 個，面積為 18 的共 12 個，面積為 32 的共 6 個；值得注意的是這裏的討論由於中間的三條水平線並未摺出，造成部份面積的三角形無法形成，甚至還有面積不同的三角形個數相同的現象；若將中間三條水平線也摺出後（如圖十一），個數的關聯與數學性質將更為強烈，然而由於相關討論並不是本篇文章書寫的主要目的，就留待各位讀者再自行討論其共通性與一般性了。



圖十一、中間三條水平線摺後圖形

陸、作品完成動作說明

接下來的摺法將是能否完成最重要的步驟了，按照原始出處 <http://www.youtube.com/watch?v=0wRDvY-KtRA> 的作法，原本應該要將紅包沿平行短邊直線反覆山谷摺，然而經筆者多次嚐試的結果，由於我們使用的是紅包袋，較原始摺法的牛皮紙信封要薄，發現這樣的摺法最後要完成作品時將不容易內摺，又為了符合最後呈現的效果，除了設計的山谷線與最後翻轉作品時的手順將較為一致，另外是完成的步驟也較為不同：

- 一、將兩側面積為 1 的三角形向內縮，中間的山谷線反覆摺疊成梯形（見封底圖十二）
- 二、接下來原梯形的上底再推入內縮，順勢反覆摺疊成正方形（見封底圖十三）
- 三、將附圖十三的頭尾互黏，在此建議膠水上於封口紅色面，與另一端的白色面互黏，所完成的作品將較為美觀。
- 四、待膠水風乾後即完成所謂的基本型

（見封底圖十四，較沒時間或耐心的讀者可以雙面膠代替，不過要注意黏貼時的完整性，以免接下來的步驟破壞了原始結構），將基本型按所完成的山谷線順序內翻，即會慢慢形成花朵的形狀（見封底圖十五、十六），並可以反覆翻摺，趣味無窮。

由於目前我們操作時的成品是白色面在內，紅色面朝外，所以翻轉時類似白蕊紅花的綻放，若再加上白色面不同方式上色，或是紅內白外的黏貼，則能有更多造型變化的設計（見封底圖十七），讓我們更加心曠神怡；或者是透過山谷線的先行繪製完成後列印裁切，使操作更加方便與準確。

柒、其他相關應用

另外提到的是這裏的翻轉花用的是長寬比 3:1 的矩形，若改以其他不同的長寬比是否會造成不同的效果？筆者曾帶領本校社團同學作相關討論，麗山高中的彭良禎老師所製作的「藝數萬花筒」也有異曲同工之妙（底下參考網址有相關介紹），然而受於篇幅關係，或許留待下次有機會再行討論了。

年節過後，春天將到，謹以這剛收完可供利用的材料，分享相關製作方式供各位讀者參考，讓這些紅包袋在回收之前，尚有再再利用的價值。若針對紅包袋的利用與設計還有興趣的讀者，底下再提供幾個網址供各位參考，其中「摺紙教學－紅包燈籠」因適逢元宵節，建議大家也可以嚐試作作，既環保

又兼具視覺效果，在此敬祝各位讀者新的一年諸事順心，心花朵朵開！

參考文獻

- 「翻轉花設計」簡報放置網站——林中生命藝數殿堂：<http://163.20.9.8/dyna/menu/index.php?account=math>
- 「藝數萬花筒」製作，彭良禎老師製，收錄於 2006 年教學創意體驗工作坊成果輯：<http://elearning.ice.ntnu.edu.tw/km/Data/Teacher/6086/data/%E6%88%91%E7%9A%84%E5%80%8B%E4%BA%BA%E6%96%87%E4%BB%B6/bb1.pdf>

- 摺紙教學－紅包燈籠：http://tw.myblog.yahoo.com/jw!LHLQrWaXERBQ_9WW3.lyOx2i/article?mid=2832
- 專家教創意做紅包袋：http://tw.nextmedia.com/subapple/article/art_id/32214221/IssueID/20100107
- 兔年紅包實拍摺紙過程：http://blog.sina.com.cn/s/blog_3c6e0ac20100mpmc.html
- 折紙千紙鶴紅包：http://v.youku.com/v_show/id_XMTUwNzI2MTI0.html
- 教大家折紙鶴紅包 <http://bbs.ci123.com/post/10806673.html>