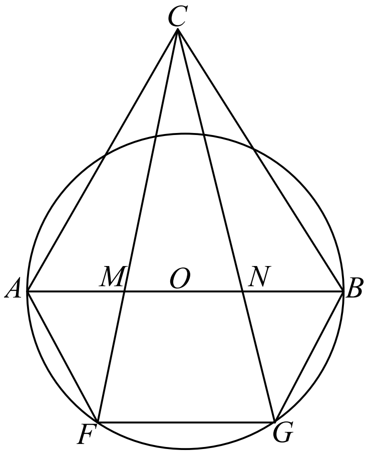
中學生通訊解題第七十六期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
7601

以圓 O 的直徑 $\overline{AB}$ 為邊作正三角形 ABC，取 $\overline{AB}$ 的三等分點 M、N，$\overline{CM}$ 、 $\overline{CN}$ 的延長線交圓 O 於 F、G。求證：$\overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GB}$。



參考解答：

證：作$\angle BOG=60°$交圓 O 於 G'，連 NG

$\because M$、N 是直徑 AB 的三等分點

$\therefore \dfrac{\overline{ON}}{\overline{OB}}=\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OG}}=\dfrac{1}{3}$ ，

而 $\overline{NB}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}=\dfrac{1}{3}\overline{AC}$ ，

$\therefore \dfrac{\overline{NB}}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{3}$ ，而$\angle BOG=\angle B=60°$

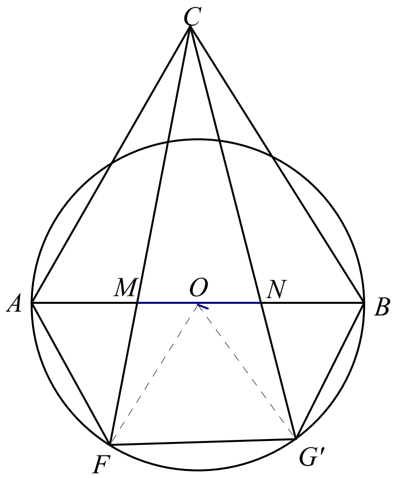
$\therefore \Delta OGN\sim\Delta BCN$

$\therefore \angle ONG=\angle CNB$ 而 O、N、B 共線

$\therefore G'G$ 重合，同理$\angle AOF=60°$

$\therefore \angle GOF=60°$，$\angle AOF=\angle GOF=\angle BOG$

$\therefore\ \overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GB}$

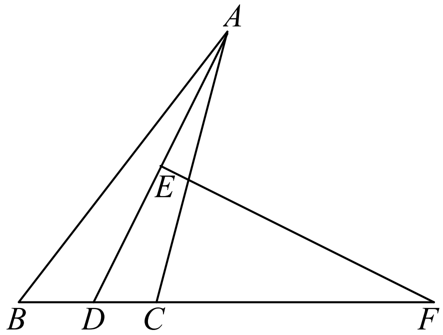


解題評註：

這是一個多種解法的的幾何問題，有的同學使用坐標法，有的同學使用代數法，有的同學使用純幾何法(這是本題較期望的方法)。上面的解法供僅供各位參考。

問題編號
7602

如圖，ΔABC 中，$\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的平分線，$\overline{AD}$ 的垂直平分線交 $\overline{AD}$ 於 E，交 $\overline{BC}$ 的延長線於 F，若 $\overline{CF}=6$，$\overline{BC}=3$，則 $\overline{FD}=$？



參考解答：

連結 $\overline{AF}$，因 $\overline{EF}$ 是 $\overline{AD}$ 的垂線平分線，

$\therefore\ \overline{AF}=\overline{FD}$

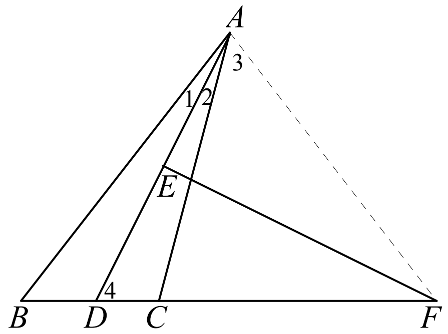
$\therefore \angle 4=\angle 2+\angle 3$，但 $\angle 4=\angle B+\angle 1$

$\therefore \angle 3=\angle B$，$\angle AFD$ 是公共角，

$\Delta ABF \sim \Delta CAF$ (AA 相似)

$\dfrac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{AF}}$，$\overline{AF}^2=\overline{BF}\cdot\overline{CF}=9\times 6=54$，

$\overline{AF}=3\sqrt{6}$，即 $\overline{FD}=3\sqrt{6}$



解題評註：

這是一個相對上比較容易的相似三角形問題只要連接輔助線 $\overline{AF}$ 可快速解決本題。上面是我們提供的解法，僅供各位參考。

問題編號
7603

把 1,2,3,⋯,241,242,243 這 243 個數任意排列為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{243}$，計算：

$|a_1-a_2+a_3|, |a_4-a_5+a_6|, \cdots, |a_{241}-a_{242}+a_{243}|$,

再將這 81 個數任意排列為

$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{81}$，計算出：

$|b_1-b_2+b_3|, |b_4-b_5+b_6|, \cdots, |b_{79}-b_{80}+b_{81}|$,

如此繼續下去，最後得到一個數 x。問 x 是奇數還是偶數？

參考解答：

1. 整數模 2 的性質：

   $-a\equiv a \pmod 2$, $|a|\equiv a \pmod 2$

2. $b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{81}$

   $=|a_1-a_2+a_3|+|a_4-a_5+a_6|+\cdots+|a_{241}-a_{242}+a_{243}|$

   $\equiv a_1-a_2+a_3+a_4-a_5+a_6+\cdots+a_{241}-a_{242}+a_{243}$

   $\equiv a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{241}+a_{242}+a_{243} \pmod 2$

   $\therefore$ 將 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{243}$ 變換成 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{81}$，並不改變它們的和的奇偶性，因此經過多次變換後依然如此。

$$X \equiv a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots + a_{241} + a_{242} + a_{243} \pmod 2$$
$$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 243 \equiv 0 \pmod 2$$

即 x 是偶數。

解題評註：

整數模 2 的性質：$-a \equiv a \pmod 2$，$|a| \equiv a \pmod 2$當 $a \in N$ 時，a、$-a$、$|a|$ 的奇偶性都一樣。

問題編號
7604

求所有的正整數 n，使得 $(108.5)^n + (147.5)^n$ 是正整數。

參考解答：

$$(108.5)^n + (147.5)^n = \frac{217^n + 295^n}{2^n}$$

1. 當 n 為偶數時，

   分子：

   $$(217)^n + (295)^n \equiv 1^n + (-1)^n = 2 (\mathrm{mod}\ 4)$$

   分母：　$2^n \equiv 0 \pmod 4$

   $\therefore$ 此時 $(108.5)^n + (147.5)^n$ 不是正整數。

2. 當 n 為奇數時：$(217)^n + (295)^n =$

   $$(217 + 295)(217^{n-1} - 217^{n-2} \cdot 295 + \cdots + 295^{n-1})$$
   $$= 2^9 (217^{n-1} - 217^{n-2} \cdot 295 + \cdots + 295^{n-1})$$

   $\because (217^{n-1} - 217^{n-2} \cdot 295 + \cdots + 295^{n-1})$

   是奇數個奇數的和，是奇數

   $\therefore$ 只有當 $n = 1,3,5,7,9$ 時，

   $(108.5)^n + (147.5)^n$ 是正整數。

解題評註：

1. 此題必須將 n 分成奇數或偶數來討論。當 n 是奇數，且 a、b 均為奇數時，利用

   $a^n + b^n =$
   $(a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$

   ，使得分子為 $2^9 k$，其中 k 為正奇數，因此得出滿足條件的正奇數;當 n 是偶數時，利用 mod 4，可知分子不是 4 的倍數,因此得出所有正偶數均不滿足條件。
2. 一些同學解出當 $n = 1,3,5,7,9$ 時，滿足條件，但未就其餘正整數加以探討，就說答案是 $n = 1,3,5,7,9$。如此只能說 $n = 1,3,5,7,9$ 是答案之中，還有其他的 n 值嗎？需對於『所有的正整數 n』討論，這個邏輯觀念同學應多注意！
3. 如果一看到這個題目,一開始不知如何下手,同學可以將 $n = 1,2,3,4,5,6,7\ldots$ 代入檢驗，再從其中觀察、歸納規律性，最後以數學方式周詳的作答。透過演繹、歸納的方法，也是解題重要的方法。