物體在任意夾角θ的兩平面鏡之間會成幾個像？

邱博文

壹、前言

高中物理幾何光學的一個典型考題：「 (大學入學考試中心92年預試試題卷一)圖1中甲乙兩面巨型鏡子，以夾角 60°方式擺置，一觀察者站立於 A 點，而 OA 直線與乙鏡的夾角為 45°。試問觀察者可自鏡中看到幾個自己的像? (A)3 (B)4 (C)5 (D)6」

在高中階段，計算成像數是考試的基本題。但是此題的角度 60°，算是個特別角，因為 60 可以整除 360。如果遇到不能整除 360 的角度呢？我們要逐步來解決這個問題。

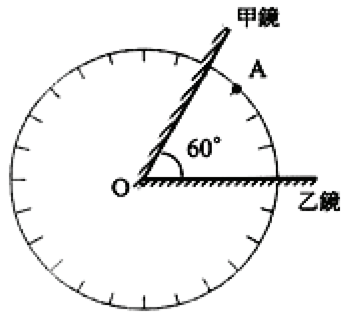

圖 1

貳、計算成像數的基本公式(兩平面鏡夾角θ可整除 360°時)

如何計算成像數呢？可以利用畫圖或討論的方式，土法煉鋼窮舉出所有的成像。但是遇到 30°、15°、⋯等成像數很多的小角度就會很辛苦。所以一般高中物理老師會介紹下列的計算公式：

1：先算 $n=\dfrac{360^o}{\theta}$

2：再修正 ①若 n 為奇數且物體不在分角線上，則成像數 N=n

②若 n 為奇數且物體在分角線上，則成像數 N=n－1

③若 n 為偶數，則成像數 N=n－1

以上面大考中心的試題來說，兩平面鏡夾角為 60°，成像數為 $\dfrac{360}{60}-1=5$。

這個公式的「意義」其實不難解釋，以 90°為例：360°/90°=4 代表一個圓周 360°，每 90°分割出一個空間，總共可以分割出 4 個 90°的空間。如圖 2.1 及圖 2.2。最後的減

一，是減去第一象限中的原物體(自己是「物」，不是「像」)。但是如果$\frac{360^o}{\theta}$是奇數，且物體不在角平分線上，會額外多一個像，各位可以實際做圖驗證。在高中物理的教學過程，我會讓學生實際作圖，「體驗」這個公式。

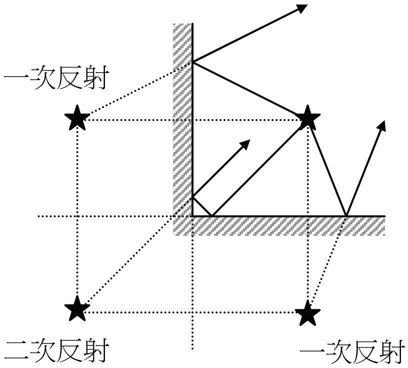

圖 2.1

圖 2.2

成像數的另一個意義是光線在兩平面鏡之間會產生幾次反射？如圖 2.1，成 3 個像，兩個一次反射的像，一個二次反射的像，表示光線最多只能有 2 次反射。因此計算出成像數，也就可以回答光線在兩平面鏡之間最多會有幾次反射。

參、兩平面鏡夾角θ不能整除 360°時，目前無公式可循

我們可以實際檢驗，360 的因數代入上述公式都正確。但是，如果改成兩平面夾角 70°、80°、13°…等等不能整除 360 的角度，到底會成幾個像呢？有的老師會告訴學生，對$\frac{360^o}{\theta}$取高斯函數，即改成 n=$[\frac{360^o}{\theta}]$。但是如果讀者細心檢查過這個計算結果後，就會發現結果並不全然正確。

如圖 3，θ 是兩平面鏡 M_1、M_2的夾角，α 是物體與 x 軸平面鏡的夾角。下表 1，摘錄了一部份電腦模擬(實際成像數)與取高斯函數算法不合之數據。細心的讀者會發現，兩者會相差 1 或 2 呢？而不會其他可能性，其原因與圖 11 有關。請讀者先耐心等待。

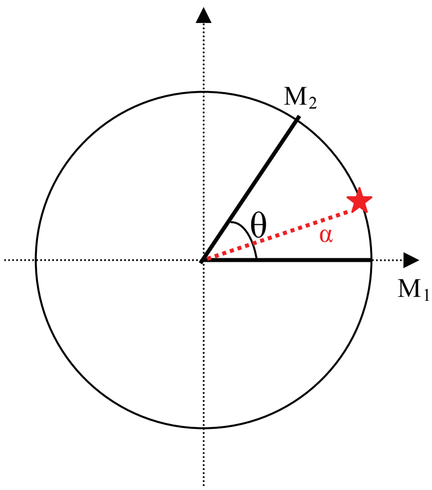

圖 3

表 1 ：摘錄部份不合的數據

θ	α	實際成像數	取高斯函數的算法	θ	α	實際成像數	取高斯函數的算法
7.0	3.5	52	50	11.0	0.5	33	31
16.0	3.5	23	21	16.0	4.0	22	21
48.0	23.5	8	7	48.0	24.0	8	6

Jearl Walker 的「物理(飛行)馬戲團(***The Flying Circus of Physics***)」中也有這個經典問題:「若在服飾店的穿衣間前有兩面鏡子…，你會看到鏡子裡有多少個自己？…如果你在腳旁放件行李，行李的影像數和你一樣嗎？」，此問題的「答案」，1975 年的第一版書上說:「目前並無公式可循，成像數跟平面鏡夾角有關，也跟物體的位置有關」(原文：5.15 There is no one equation giving the number of images possible of the angle between the mirrors and the angular location of the object with respect to the mirrors.)。2007 年的第二版中，亦無提及找到成像數的公式。

我在 2008 年 2 月參觀香港科學博物館，剛好也有平面鏡特展，展場上寫成像數為 $\frac{360}{\theta}-1$，無任何限制，也無奇偶數與物體位置的討論。顯見大多數人對於這個看似簡單的光學問題，並沒有深入而正確的了解。

我花了幾年的時間,想到一個新的方法可以快速而簡單的計算出任意夾角的成像數。討論的過程雖然有點繁瑣，但是最後結果算是相當簡單。

肆、平面鏡的成像原理與計算規則

但是我們怎麼知道最後的結果與公式是對的呢？首先，我們定義好成像數的計算規則，再由電腦「窮舉」出所有的成像。

在我們正式討論前，要先把成像的「遊戲規則」講清楚，避免因為「像」的定義不同，而對成像數有不同的看法。按照一般高中物理課本對於平面鏡成像的敘述：

❶ 只要『物』或『像』在平面鏡『之前』，就會成像，所謂『之前』是包括鏡面的延長線(面) 『之前』，但『之前』並不包括該延長線。

❷ 上述規則是遞迴定義，一直畫到所成的像落於在鏡後，則停止作圖。

❸ 如果是成像正好在平面鏡的延長線上，視為在鏡後(成像在鏡後，停止作圖)。

但是此規則要變成實際的演算法，還需要先清楚地定義一些細節。各位等一下可以參考兩個實例(圖 4 及圖 5)的討論。電腦程式的演算法如下：

假設兩平面鏡夾角 θ，物體放在 α 度處(參考圖 4)，「禁區」【禁區是指同時位於兩鏡的後面】在 180~180＋θ(等於 180 或等於 180＋θ 都算在禁區)

Step1 先對 $M_1(0°)$成像，再對 $M_2(\theta)$成像，直到落入禁區，即成像在兩鏡之後時，停止作圖。

其順序為：α➡－α➡2θ＋α➡－(2θ＋α) ➡4θ＋α➡－(4θ＋α)➡…….

先令 angle=α

第 1 步：angle 乘以(－1)→檢查範圍→若落於兩鏡之後，則跳到 Step 2

第 2 步：angle 乘以(－1)再加 2θ→檢查範圍→若落於兩鏡之後，則跳到 Step 2 遞迴定義回第 Step 1

Step 2 記錄最後成像的角度。

Step 3 先對 $M_2(\theta)$成像，再對 $M_1(0°)$成像 α➡2θ－α➡－(2θ－α) ➡4θ－α➡－(4θ－α)➡……

先令 angle=α

第 1 步：angle 乘以(－1) 再加 2θ→檢查範圍→若落於兩鏡之後，則跳到 Step 4

第 2 步：angle 乘以(－1)→檢查範圍→若落於兩鏡之後，則跳到 Step 4

遞迴定義回第 Step 3

Step 4 記錄最後成像的角度。

Step 5 如果 Step 2 與 Step 4 的角度相同，則表示兩像重疊，即我們重複計算，故最後的成像數減一。

我用 Mathematica 4.0 版撰寫程式(當然讀者也可以利用不同的程式語言撰寫程式)，利用上述演算法計算成像數，詳細程式列在附錄一。下文中，即以此程式模擬的結果，做為實際的成像數。

回頭以 360 的因數代入原公式檢驗，模擬結果也與公式一致。等於用窮舉證法間接證明了原來的公式用於 360 的因數無誤。

為了先讓大家更了解上述的流程，這當然也間接影響到任意角度的討論，所以我先舉一個實際例子讓大家了解：

範例(一)：夾角 θ=60°，物體在 α=20°處(以下°度的符號多半省略)，禁區在 180~180+60=240

Step 1　第 1 個像 angle=－20 [－20+360=340, 340 未在 180~240 之間]
第 2 個像 angle=20+2×60=140 [未在 180~240 之間]
第 3 個像 angle=－140 [－140+360=220,在 180~240 之間，故成像停止]

Step 2　記錄最後一個角度＝220

Step 3　第 1 個像 angle=－20+2×60=100　[未在 180~240 之間]
第 2 個像 angle=－100 [－100+360=260 未在 180~240 之間]
第 3 個像 angle=100+2×60=220 [在 180~240 之間，故成像停止

Step 4　記錄最後一個角度＝220。

Step 5　Step2 與 Step4 的角度相同，表示成像重複，則最後成像數=6－1=5

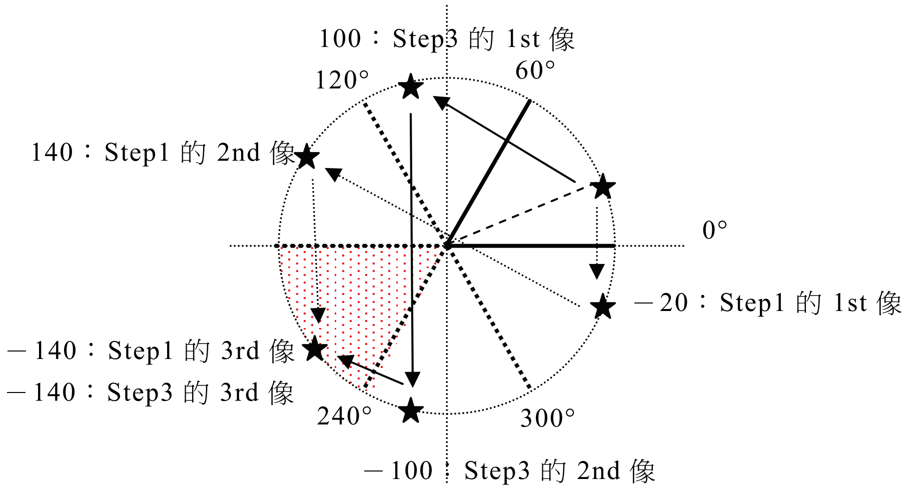

圖 4：平面鏡夾角 60 度成像圖，箭號代表成像順序

但是如果夾角 θ 不整除 360 呢？我再舉一個不整除的例子，來看一般性的結果。

範例(二)：夾角 θ=70 度，物體在 α=20 度處，禁區在 180~180+70=250

Step 1　第 1 個像 angle=－20 [－20+360=340, 340 未在 180~240 之間]
第 2 個像 angle=20+2×60=140 [未在 180~240 之間]
第 3 個像 angle=－140 [－140+360=220,在 180~240 之間，故成像停止]

Step 2　記錄最後一個角度＝220

Step 3　第 1 個像 angle=－20+2×70=120　[未在 180~250 之間]
第 2 個像 angle=－120 [－120+360 =240 [在 180~250 之間，故成像停止]

Step 4　記錄最後一個角度＝240

Step 5　Step2 與 Step4 的角度不同，表示成像未重複，則最後成像數=5－0＝5

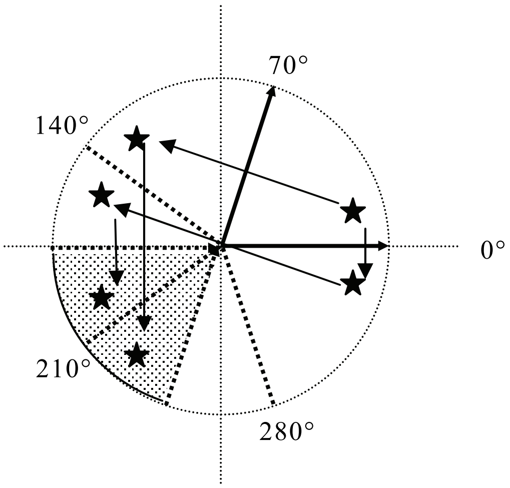

圖 5：平面鏡夾角 70 度成像圖

從上述討論我們就會發現，為何目前還沒有人可以利用公式計算出任意夾角的成像數呢？關鍵在於成像位置類似一個振盪數列，在正負之間擺盪，而且還要檢驗正負角度是不是同一個角度，避免多算一個，不是取高斯函數的方式就能簡單解決。

伍、觀念頓悟--轉換成兩平行平面鏡之間的成像

因為筆者擔任高中物理的教學工作，每年都會重新「複習」這個問題。有一次，突

然「頓悟」出這個問題與兩平行平面鏡之間成無窮多個像(如下圖 6.1 及 6.2)的相似性。

圖 6.1：物體放於兩平行平面鏡間

圖 6.2：物體在兩平行平面鏡之間成無窮多像

也類似高中物理課本中提到德布羅依(Louis de Broglie)利用物質波解釋波耳氫原子模型穩定態。如下圖，把直線駐波，頭尾對接繞成圓形。

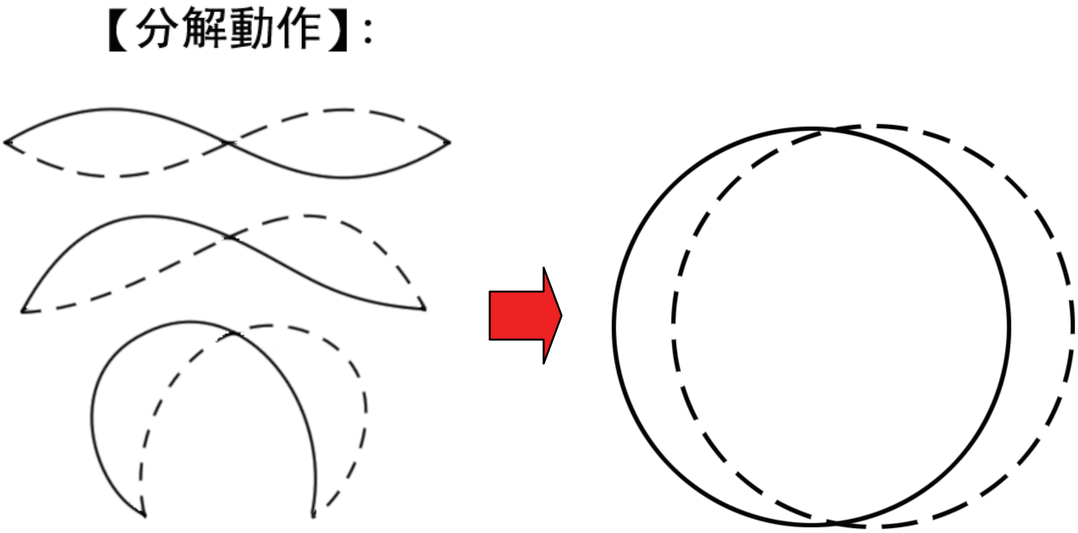

圖 7：直線駐波變形成圓形駐波

我嘗試的解題方式是等於把德布羅依的步驟顛倒過來，把夾角 θ 的兩平面鏡的成像展開，「轉換」成兩平行平面鏡的成像，如圖 8。

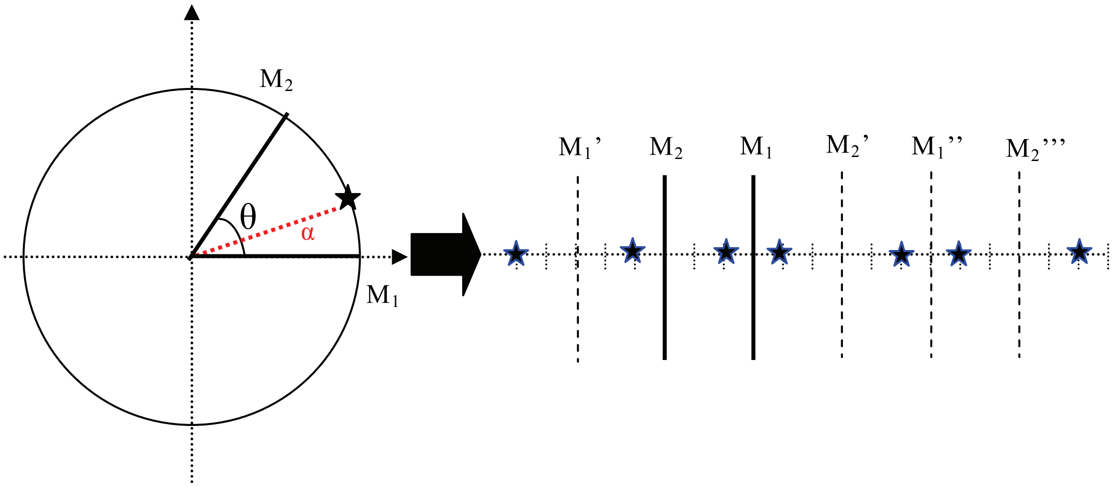

圖 8：原圖轉換成兩平行平面鏡的成像

但是物體在兩平行平面鏡成無窮多個像，但是夾角θ的平面鏡只成有限個數。兩個問題也許相似，但是並不相同。如何求得真正的成像數呢？中間還有一些問題要克服。

陸、解決任意夾角成像數的計算方式與原理

把圖 5，夾角 70 度兩平面鏡的成像圖，展開成兩平行平面鏡之成像(以下簡稱為直線展開圖)，如下圖。禁區以粗框加網底表示。

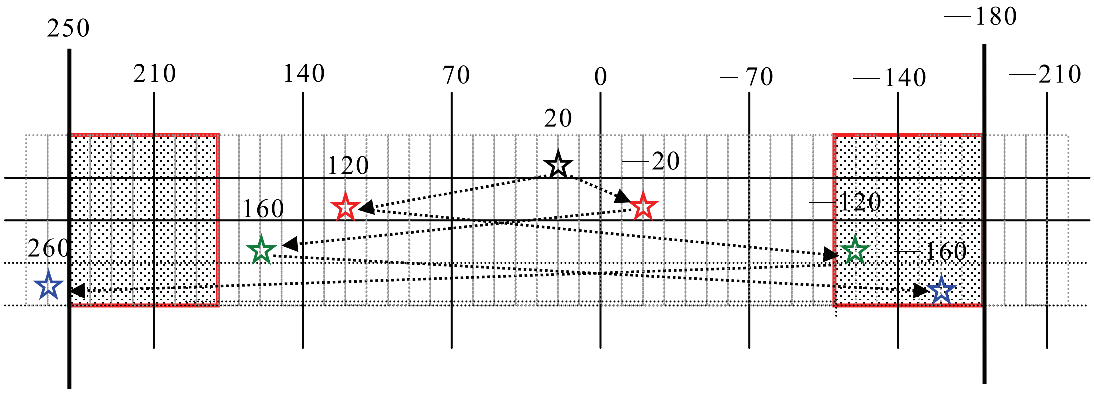

圖 9.1：平面鏡夾角 70 度成像直線展開圖

直線展開圖中第一列表示原物體，第二列代表一次反射的像，第三列代表二次反射的像，以此類推。箭號指出成像順序。

但是物體在兩平行平面鏡成無窮多個像，但是夾角 70 的平面鏡只成有限個數。如何求得真正的成像數呢？

我的想法的第二步是從 0~70 度中間的 35 度線，像折紙一樣對折翻到右邊，讓左右兩禁區重疊，即讓 250 度線與－180 度線重合。如下之示意圖：

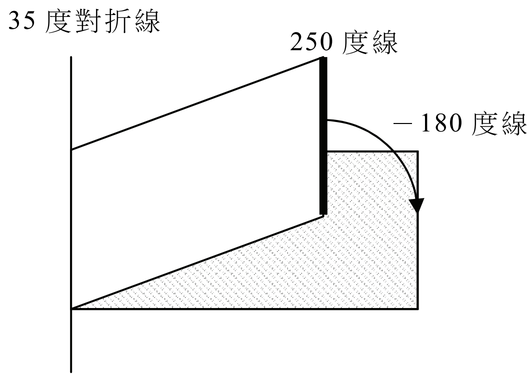

圖 9.2：對折示意圖

星形上方以對折後其所在的負向位置的角度來標示，下方則標示對折前的角度。對折到右邊的圖形並以圓框圈出，表示來自於左方，原位置以虛線標出，以便對照。如下圖：

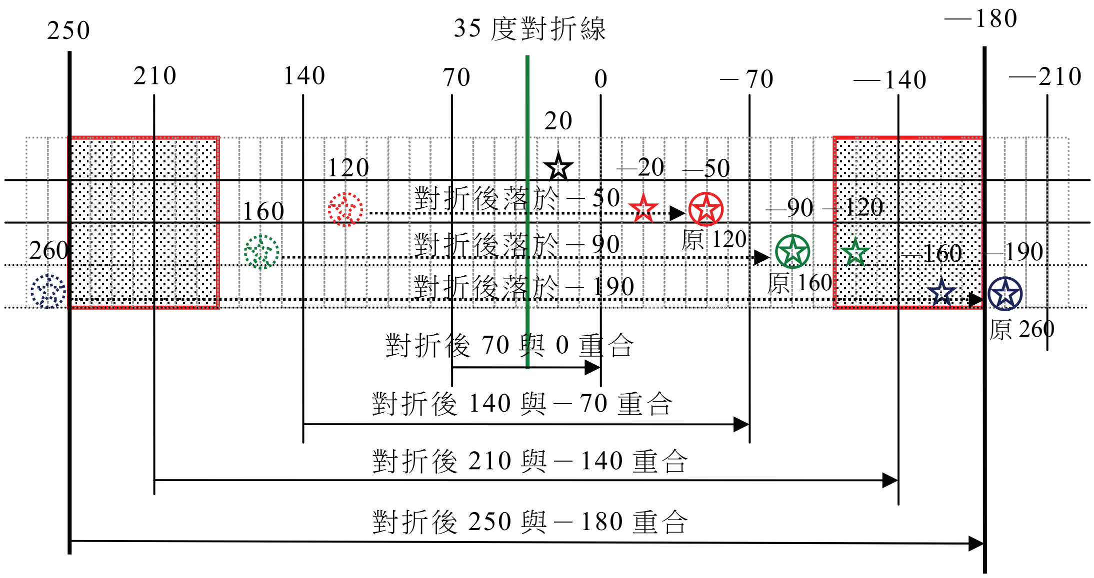

圖 9.3：平面鏡夾角 70 度成像直線展開圖 2

我們把一次反射、二次反射、…排成同一列，如圖 9.4，就會發現一個規律性，就是每個「θ 空間」【其意義如下圖 9.4，類似兩平行平面鏡的成像，但現在是以角度當作兩平面鏡的距離，平面鏡或其像與平面鏡或其像所切割成的空間稱為「θ 空間」】，都有兩個像，且每個 θ 空間內的像，左右對稱。

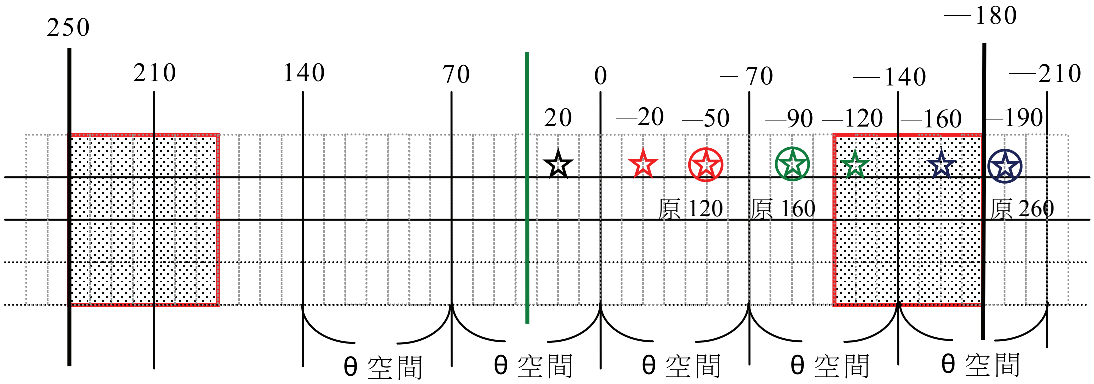

圖 9.4：平面鏡夾角 70 度成像直線展開圖 3

所以原來求成像數的問題，已經被轉換成上圖：從 0~－180 度的空間中有幾個像？

首先，我們先算 180 度可以分割成幾個完整的 70 度空間呢？有$[\frac{180}{70}]=2$個。每一個 θ 空間有兩個像，故完整 θ 空間的部份，共有 4 個像。

關鍵在於最後一個被禁區切割成不完整的 θ 空間，有幾個像落在－180 度的線的左邊？

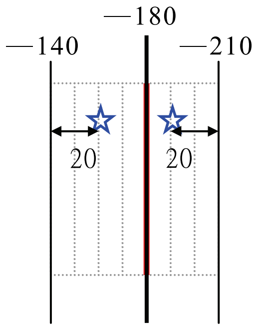

圖 10：平面鏡夾角 70 度的最末θ空間圖

如上圖，恰有一個位於－180 度線的左側，故總共成 4+1=5 個像。

更廣義來看，這兩個像與－180 度線之間的關係「乍看之下」(如果沒有考慮重疊或恰落於線上)有下列 3 種可能性，如下圖 11：即－180 度線在兩個像的左邊、中間、右邊，等於成像數是完整的 θ 空間算完後，再依這三種情況分別+0、+1、+2 (圖中 $\beta=[\frac{180}{\theta}]\theta$)。這就是原先公式，直接取高斯函數的計算與實際成像數有時相同，但有時會相差 1 或 2 的原因。所以，要正確求得成像數，不能只取高斯函數，最後必須討論是三種情況的哪一種。

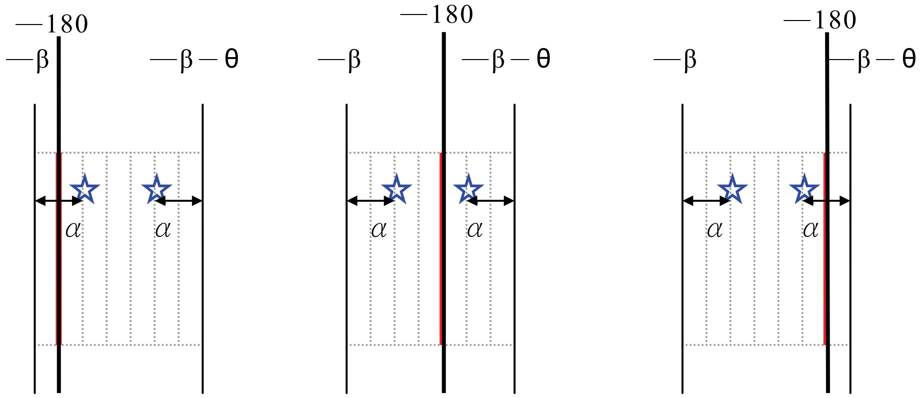

圖 11：最末空間可能展開圖

但是如果再細究，如果成像剛好在－180 度線上，要算嗎？如下圖當我們把沿著 0~70 度中間的 35 度線像折紙一樣對折翻到右邊時，左右兩邊的禁區會重疊(180 度與 250 度重疊)，如下圖。所以－180 度線正好是兩鏡的延長線。按照成像規則❸如果是成像正好在平面鏡的延長線上，視為在鏡後(成像在鏡後，停止作圖)。故恰好在－180 度線上，等於落在鏡面的延長線上，不算。

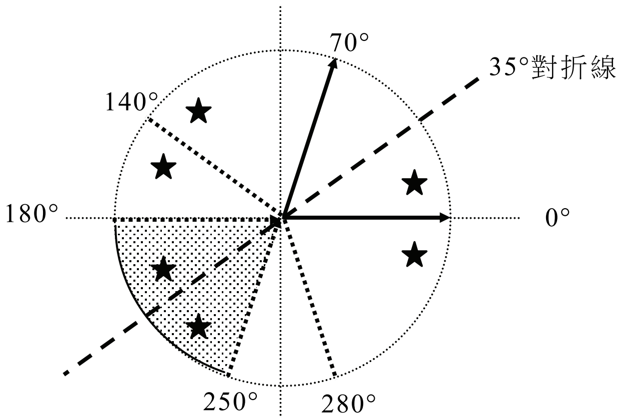

圖 12：平面鏡夾角 70 度成像圖

我們可以檢驗夾角 θ=70 度，物體在 α=30 度處的例子。250 度的像，恰好於落在鏡面的延長線上，不算，如下圖 13.1：

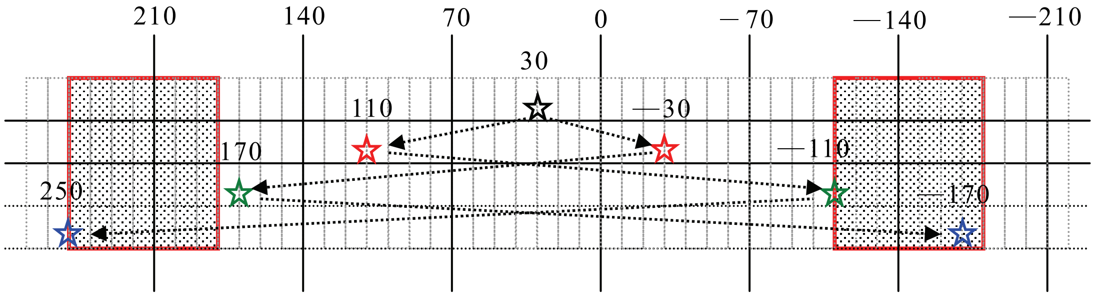

圖 13.1：平面鏡夾角 70 度成像直線展開圖

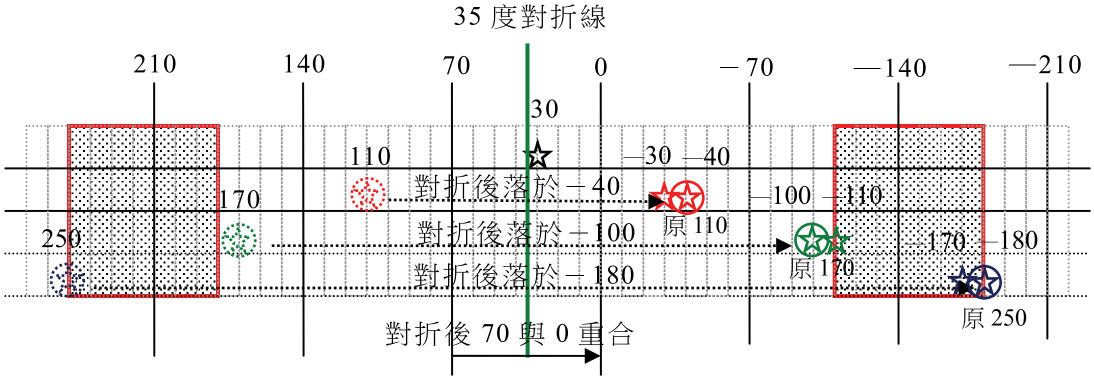

圖 13.2：平面鏡夾角 70 度成像直線展開圖 2

那有沒可能，兩個像重疊呢？有的，如圖 14.1，但因為每個 θ 空間內是對稱的，如果兩個像重疊，就是物體放在角平分線上。但即使是重疊，成像數還是要分開算，因為原先是來自不同的空間。我們沿中間對折是計算出成像數的手段，其實改變了實際成像的位置，部份禁區成像的問題留待第七節來解決。

那有沒有可能，兩個像重疊，又剛好位在－180 度線上呢？要產生這種結果，必須同時滿足兩個條件，一是物體放在角平分線上，二是 $180=\beta+\dfrac{\theta}{2}\rightarrow 180=[\dfrac{180}{\theta}]\theta+\dfrac{\theta}{2}\rightarrow 360=2[\dfrac{180}{\theta}]\theta+\theta\rightarrow 360=(2[\dfrac{180}{\theta}]+1)\theta$，即 360÷θ=奇數。

我們可以檢驗夾角 θ=72 度，物體在 α=36 度處的例子，252 及－180 度的像，恰好於落在鏡面的延長線上，不算，如下圖 14.1：

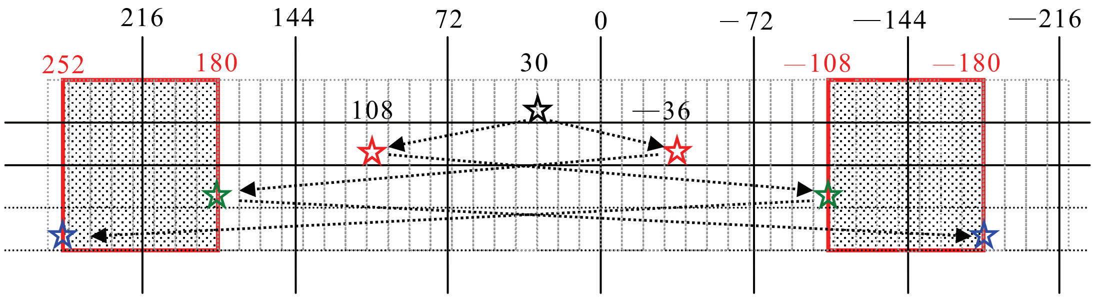

圖 14.1：平面鏡夾角 72 度成像直線展開圖

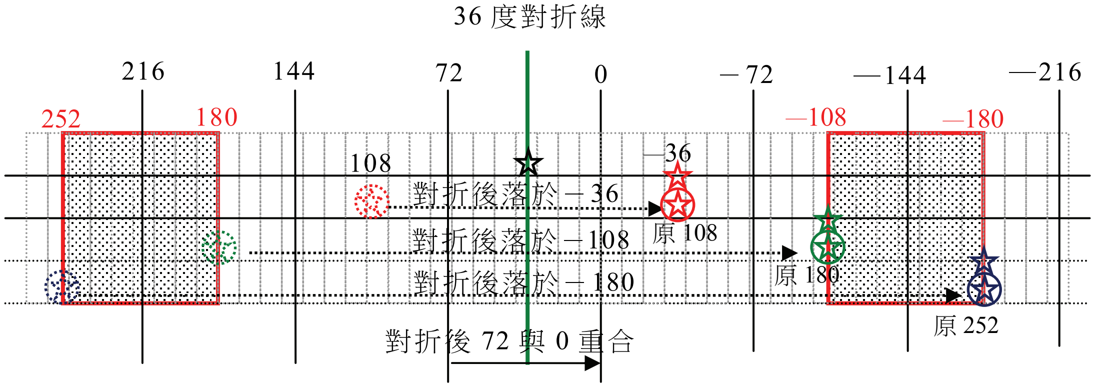

圖 14.2：平面鏡夾角 72 度成像直線展開圖 2

所以結論是，位於－180 度線上的像，等於落在鏡面的延長線上，不算，即使兩個都位於－180 度線上亦同。

柒、鏡面夾角未能整除 360 度之計算方式

所以，目前我們可以有一個簡單的討論方法，來判斷 θ 不整除 360 的情況：

(1) 先算 $N=[\frac{180}{\theta}]\times 2$

(2) 再算 $d=180-[\frac{180}{\theta}]\theta$

(3) 判斷 α 及 θ－α 是否＜d(等於 d 時，等於落在鏡面的延長線上，不算)：只有一數＜d，成像數 N 加 1；若兩數皆＜d，則 N 加 2；若兩數皆≧d，則成像數即為 N (即對應到圖 11 的三種狀況)。若 α 與 θ－α 相等，仍應視為兩個數。

範例(三)：夾角 θ=70，物體在 α=20 處

(1) $N=[\frac{180}{70}]\times 2=4$

(2) $d=180-[\frac{180}{70}]70=180-140=40$

(3) α=20 及 θ－α=50，只有一數＜40，故最後成像數=4+1=5

講的更簡單一點，

範例(三)：θ=70，物體在 α=20 或 θ－α=50，其實是對稱的。

180÷70=2(商)...40(餘數)，只有 α=20<40(餘數)，故成像數=2×2(商)+1=5

再舉一例，

範例(四)：θ=70，物體在 α=33 或 θ－α=37，其實是對稱的。

180÷70=2(商)...40(餘數)，33 及 37<40(餘數)，故成像數=2×2(商)+2=6。

正如 Walker 所說「成像數跟平面鏡夾角有關，也跟物體的位置有關」。如上述之實例，如果只問夾角 70 度的平面鏡會成幾個像？答案應該回答「跟物體的位置有關，5 或 6 個像」。

捌、鏡面夾角整除 360 度之處理方式

但是如果以整除 360 度的角度代入驗算，例如：30°、60°、90°、...，發現上面的計算方式會比實際多一個。為何產生此結果呢？我們先回頭看看第一個例子：

範例(一)：夾角 θ=60°，物體在 α=20°處(以下°度的符號多半省略)，禁區在 180~180+60=240

Step 1 ……

Step 2 記錄最後一個角度＝220

Step 3 ……

Step 4 記錄最後一個角度＝220。

Step 5 Step2 與 Step4 的角度相同，表示成像重複，則最後成像數=6－1=5

問題就出在最後 Step5 的『重複』。

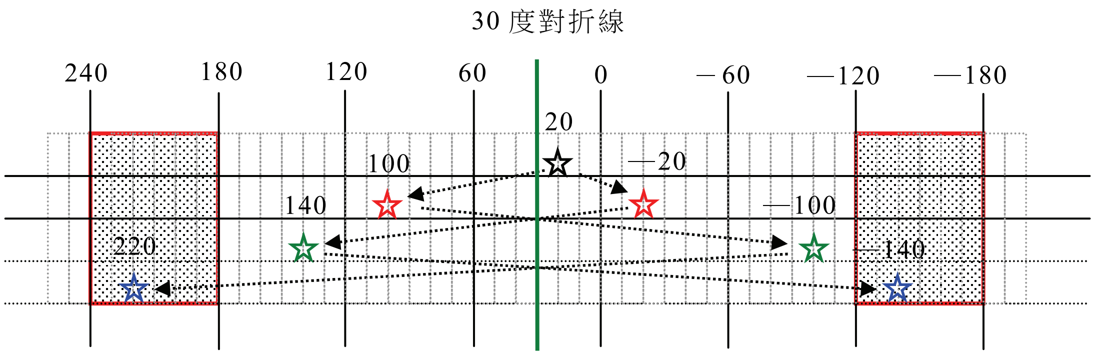

圖 15.1：平面鏡夾角 60 度成像直線展開圖 1

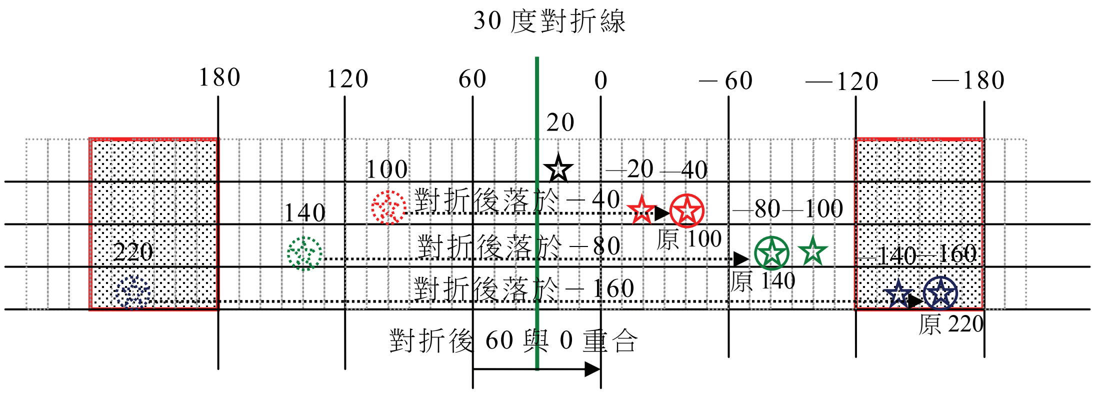

圖 15.2：平面鏡夾角 60 度成像直線展開圖 2

我們從中間對折，是為了方便計算成像數，但其實改變了成像的位置。其實圖中左邊的禁區跟右邊的禁區，是同一個，而不是不同的兩個。

左邊禁區的左邊界 240=右邊禁區的左邊界—120(－120+360=240)，左邊禁區的右邊界 180=右邊禁區的右邊界—180(－180+360=180)。

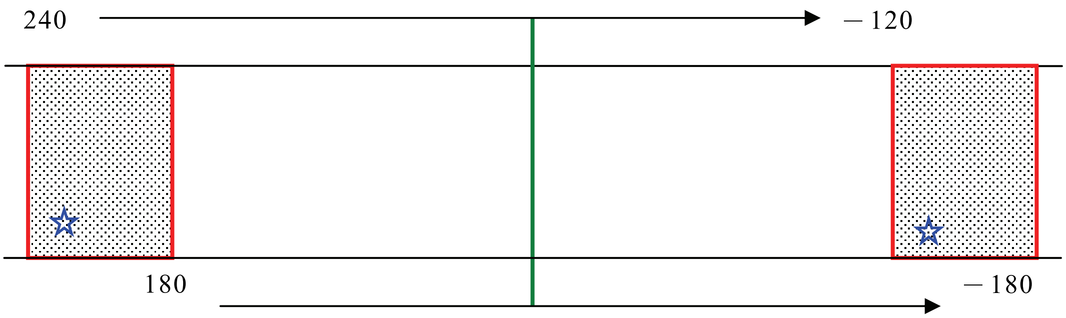

圖 15.3：平面鏡夾角 60 度成像直線展開圖 3

我們原來的作法是從中間對折，將禁區合併，禁區內看似左右對稱，其實實際上卻是左右顛倒了，位置重疊，導致公式會多算一個。

圖 15.4：平面鏡夾角 60 度成像對折圖

其他的 θ 空間則沒有這個問題，以圖 15.2 為例，對折後 60~120 與 0~－60 雖然畫在一起，但本質上是兩個不同的空間。只有禁區 180~240 與－120~－180 (加 360 後變為 240~180) 畫在一起，也是同一空間。因此只須要考慮禁區即可。

因此，成像如果在禁區內對稱，就代表成像重複，成像數必須減一。又因為每一個 θ 的空間的圖像是對稱的。因此，要出現成像在禁區內對稱，只有在禁區與 θ 空間「同時」重合才會發生 ($\beta=[\frac{180}{\theta}]\theta=180$)，即 θ 一定要整除 180，才會發生這種狀況，不整除不會發生這種狀況。如下圖 16。至於此空間內的兩個像，位置重不重疊並不重要(重疊其實表示物體原來放在角平分線上)，只要成像在禁區內對稱，即 θ 整除 180 時，成像數就必須減一。

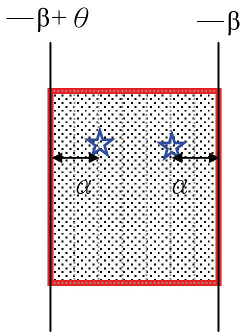

圖 16：θ整除 180 度示意圖

玖、最後的通式

所以，我們可以做一個結論，判斷成像數的通則，必須分成兩類：

兩平面鏡夾角為 θ，物體距其中一平面鏡角度為 α 時，成像數為：

1. 如果 θ 整除 180，成像數 N= $\frac{360}{\theta}$ －1 (不管物體位於何處，不用討論奇偶數)

2 如果 θ 不整除 180

(1) 先算 N=$[\frac{180}{\theta}]\times 2$

(2) 計算 d=180－$[\frac{180}{\theta}]\theta$

(3) 判斷 α 及 θ－α 是否＜d(等於 d 時，不算在內)：只有一數＜d，成像數 N 加 1；若兩數皆＜d，則 N 加 2；若兩數皆≧d，則成像數即為 N。若 α 與 θ－α 相等，仍應視為兩個數。

上述的演算法，任意角度都可以簡易的計算出成像數。其實現在回頭想想道理也很簡單：半圓周 180 度中每切割出一個完整的 θ 空間，就有一個像，兩個平面鏡兩邊都要算，故乘以 2。但是最後不完整的部份，即 θ 不整除 180 時，就是要判斷成像是否超過禁區，在邊界內就算，超過禁區的邊界或在邊界上就不算。

但是我想挑戰另一個的任務，達成 Walker 的心願，就是把上述結果寫成單一計算公式(不過此公式很複雜)，而不是用討論的方式。要把上述的想法，變成數學式，需要 2 個高斯函數運算技巧的幫助。

(1) 若 $a<b$，則 $[\frac{a-b}{a+b}]^2=1$；若 $a\geq b$，則 $[\frac{a-b}{a+b}]^2=0$

(2) $\left[\frac{\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor}{\frac{x}{2}}\right]$ 若 x 是 2 的倍數=1，若非 2 的倍數=0

所以成像總數的公式，初步形式為 $N=2[\frac{180}{\theta}]$

再搭配高斯函數的計算，考慮上述的兩個修正項

(1) 若 α＜180－$[\frac{180}{\theta}]\theta$，公式加 1

(2) 若 θ－α＜180－$[\frac{180}{\theta}]\theta$，公式再加 1

所以成像總數的公式，修正為

$$N=2[\frac{180}{\theta}]+[\frac{\alpha-(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}{\alpha+(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}]^2+[\frac{(\theta-\alpha)-(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}{(\theta-\alpha)+(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}]^2$$

再修正 θ 整除 180 的情況，即 θ 整除 180 時，成像數減一(轉換成：360÷θ 是偶數時，成像數減一)：

所以成像總數的公式，再修正形式為

$$N=2[\frac{180}{\theta}]+[\frac{\alpha-(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}{\alpha+(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}]^2+[\frac{(\theta-\alpha)-(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}{(\theta-\alpha)+(180-[\frac{180}{\theta}]\theta)}]^2-\left[\frac{\left[\frac{360/\theta}{2}\right]}{\frac{360/\theta}{2}}\right]$$

如果以上述演算法的符號，公式簡寫為

$$N=2[\frac{180}{\theta}]+[\frac{\alpha-d}{\alpha+d}]^2+[\frac{(\theta-\alpha)-d}{(\theta-\alpha)+d}]^2-\left[\frac{[180/\theta]}{180/\theta}\right]$$

附錄二列出此公式在 Mathematica 中的寫法。我以近乎「窮舉證法」的方式，每隔 0.1 度，從 0~360 度，驗證附錄一與附錄二的公式，兩者解題的概念不同，但結果吻合。解決了從高中時代到現在當物理老師多年來的疑惑，任意角度都可以計算。也許 Walker 的新書，關於此問題可以改成「目前已有公式可循」。或許如愛因思坦所說的：「並不是我很聰明，而只是我和問題相處得比較久一點。(It's not that I'm so smart, it's just that I stay with problems longer.) 」

參考資料

沃克(2000)，物理馬戲團(葉偉文譯)。台北市：天下文化。(原著出版於 1977)
Jearl Walker(1975), *The Flying Circus of Physics With Answers.* John Wiley and Sons.
Jearl Walker(2007), *The Flying Circus of Physics 2nd ed*. John Wiley and Sons.

附錄一

```
(theta = 72;
  alpha = 36;
  check = 0; test1 = 0; test2 = 0;
  n = 0;
  angle = alpha;
  Label[step1];
  angle = (-1)*angle;
  If[angle < 0, check = angle + 360, check = angle];
```

```
Print[angle, " ", check];
If[(check >= 180) && (check <= 180 + theta), test1 = check; n = n + 1;
   Goto[step2], n = n + 1];
angle = (-1)*angle + 2*theta;
If[angle < 0, check = angle + 360, check = angle];
Print[angle, " ", check];
If[(check >= 180) && (check <= 180 + theta), test1 = check; n = n + 1;
   Goto[step2], n = n + 1];
Goto[step1];
Label[step2];
angle = alpha;
Label[step3];
angle = (-1)*angle + 2*theta;
If[angle < 0, check = angle + 360, check = angle];
Print[angle, " ", check];
If[(check >= 180) && (check <= 180 + theta), test2 = check; n = n + 1;
   Goto[step4], n = n + 1]; angle = (-1)*angle;
If[angle < 0, check = angle + 360, check = angle];
Print[angle, " ", check];
If[(check >= 180) && (check <= 180 + theta), test2 = check; n = n + 1;
   Goto[step4], n = n + 1];
Goto[step3];
Label[step4];
If[test1 == test2, n = n - 1];
Print[n];)
```

附錄二

Mathematica 中，高斯函數為 Floor[n]

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{f[angle\_,\ alpha\_]} = \\
&\quad \mathrm{Floor}\left[\frac{180}{\mathrm{angle}}\right]*2+ \\
&\quad \mathrm{Floor}\left[\frac{(\mathrm{alpha})-\left(180-\mathrm{Floor}\left[\frac{180}{\mathrm{angle}}\right]*\mathrm{angle}\right)}{(\mathrm{alpha})+\left(180-\mathrm{Floor}\left[\frac{180}{\mathrm{angle}}\right]*\mathrm{angle}\right)}\right]\text{^}2+ \\
&\quad \mathrm{Floor}\left[\frac{(\mathrm{angle}-\mathrm{alpha})-\left(180-\mathrm{Floor}\left[\frac{180}{\mathrm{angle}}\right]*\mathrm{angle}\right)}{(\mathrm{angle}-\mathrm{alpha})+\left(180-\mathrm{Floor}\left[\frac{180}{\mathrm{angle}}\right]*\mathrm{angle}\right)}\right]\text{^}2- \\
&\quad \mathrm{Floor}\left[\frac{\mathrm{Floor}\left[\frac{360}{2\,\mathrm{angle}}\right]}{\frac{360}{2\,\mathrm{angle}}}\right]
\end{aligned}
$$