尋找失落的 n 邊形

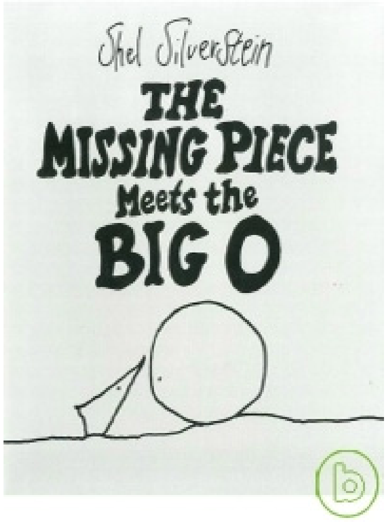
楊惠后
臺中市私立曉明女子高級中學

壹、一個數學遊戲

Shel Silverstein 在 1981 年出版了一本膾炙人口的心理叢書「The Missing Piece Meets the Big O」，中文譯本是「失落的一角」(譯者林良)；內容描述缺了一角的圓並不快樂，為此它緩緩地踏上旅程去尋找它失落的一角，途中它上山下海，經歷人生百態，等到它找到之後⋯。

幾年前在因緣際會下，我從一本舊書(書名已不可考)中看過一個數學遊戲，遊戲內容大概是：有一名老師先帶五名學生 A、B、C、D、E(手拿著繩子)到操場上圍成一個任意五邊形，然後他在地上做記號定出各邊的中點 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 的位置，再清空場地；最後他帶領全班到現場，要求同學能否根據地上的 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 五點，找出 A、B、C、D、E 五人原來的位置。

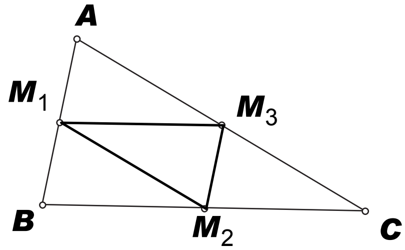
這是一個從五邊形各邊的中點反求各邊頂點位置的問題，作者直接利用中心對稱的幾何變換方法來解決這個問題；文末也拋出一個疑問「適用於任意 n 邊形嗎？」。針對這些問題，我從三角形出發開始研究，也使用 GSP 做實驗數學，最後利用解析幾何的方法來驗證，並作出結論。



貳、研究過程

一、三角形

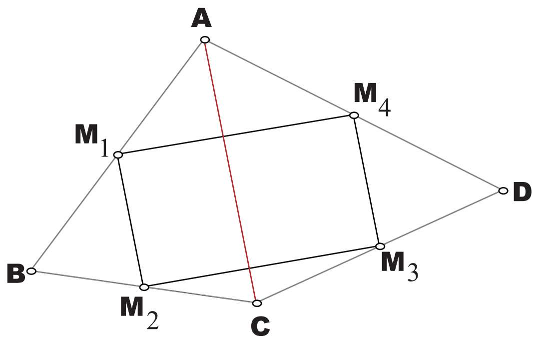
在國中的幾何課程中，已知 M_1、M_2、M_3 為某三角形三邊的中點，我們只要過 M_1 作 $\overline{M_2M_3}$ 的平行線、過 M_2 作 $\overline{M_1M_3}$ 的平行線且過 M_3 作 $\overline{M_1M_2}$ 的平行線，設三條平行線的交點為 A、B、C，則 ΔABC 即為所求。(見圖一)

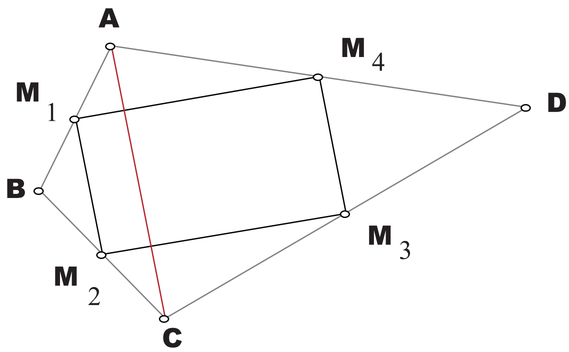


圖一

二、四邊形

在國中的幾何課程中，也學過「連接任意四邊形各邊的中點會形成平行四邊形，且其周長為原四邊形的兩對角線長之和」的性質；所以若 M_1、M_2、M_3、M_4 為某四邊形各邊的中點，則四邊形 $M_1M_2M_3M_4$ 必為平行四邊形，而且以 M_1、M_2、M_3、M_4 為各邊中點的四邊形應該有無限多個！今取 $\overline{AC}//\overline{M_1M_2}$ 且 $\overline{AC}=2\overline{M_1M_2}$，在 $\overrightarrow{AM_1}$ 上取 $\overline{AM_1}=\overline{BM_1}$，在 $\overrightarrow{AM_4}$ 上取 $\overline{AM_4}=\overline{DM_4}$，依序連接起來即得四邊形 ABCD。(見圖二)

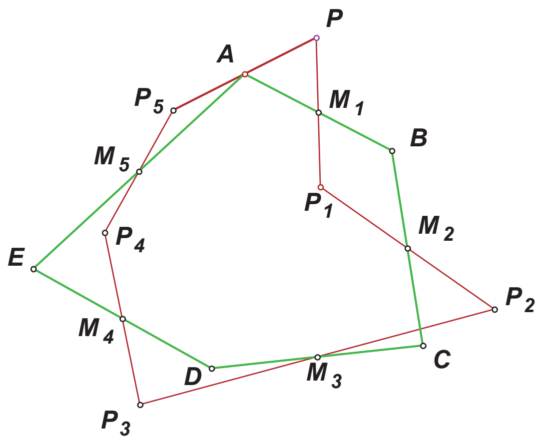




圖二

三、五邊形

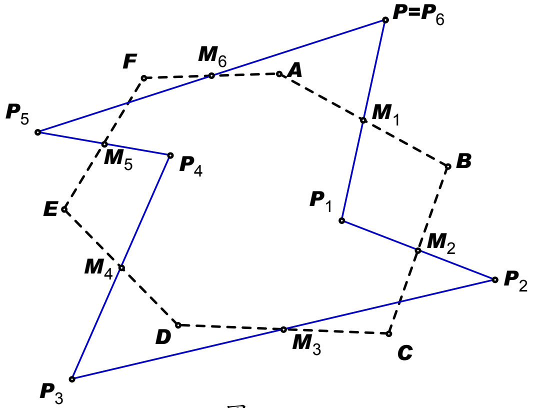
已知 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 為某五邊形各邊的中點，令 P 為異於 M_1、M_2、M_3、M_4、M_5 五點的任意點，以 M_1 為對稱中心，求得對稱點為 P_1；再以 M_2 為對稱中心，求得對稱點為 P_2；…以此類推，最後求得 P_5；連接 $\overline{PP_5}$，則 $\overline{PP_5}$ 的中點便為五邊形的一個頂點，令其為頂點 A，然後以 M_1 為對稱中心求出第二個頂點 B，如法炮製，就不難把五個頂點 A、B、C、D、E 全部都求出來了。(見圖三)



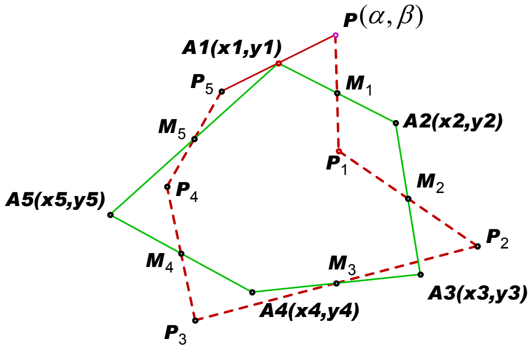
圖三

四、六邊形

根據四邊形不是惟一的經驗，我們是否可以把上述適用於五邊形的中心對稱的幾何變換方法加以推廣呢？我使用 GSP 做實驗數學(見圖四)，發現結果是失敗的！由圖中可以發現到 P_5 以 M_6 為對稱中心所求出來的對稱點 P_6 恰為點 P。所以無法利用中心對稱的幾何變換方法來求出原六邊形(虛線處)。



圖四



圖五

參、解析幾何的方法

經由上述三~六邊形的四個結果，我們不難推測：可利用中心對稱的幾何變換方法求出來的 n 邊形，n 必爲奇數($n \geq 3$)。我試著用解析幾何的方法來驗證這個猜測。首先，我還是以五邊形及六邊形爲例作說明。

一、五邊形

令五邊形(見圖五)的五個頂點坐標 $A_i(x_i, y_i)$，$i = 1 \sim 5$；點 P 的坐標爲 (α, β)，利用 M_1 同時爲 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{PP_1}$ 的中點，

所以 $P_1(x_2 + x_1 - \alpha, y_2 + y_1 - \beta)$；

同樣的 M_2 也是 $\overline{A_2A_3}$ 與 $\overline{P_1P_2}$ 的中點，

所以 $P_2(x_3 - x_1 + \alpha, y_3 - y_1 + \beta)$；

依序作下去，可得 $P_3(x_4 + x_1 - \alpha, y_4 + y_1 - \beta)$、$P_4(x_5 - x_1 + \alpha, y_5 - y_1 + \beta)$，最後得到 $P_5(2x_1 - \alpha, 2y_1 - \beta)$，因爲 $\dfrac{P + P_5}{2} = (x_1, y_1)$，所以 A_1 恰爲 $\overline{PP_5}$ 的中點。

二、六邊形

令六邊形(見圖六)的六個頂點坐標 $A_i(x_i, y_i)$，$i = 1 \sim 6$；點 P 的坐標爲 (α, β) 利用中點坐標公式可得

$$P_1(x_2 + x_1 - \alpha, y_2 + y_1 - \beta)、$$
$$P_2(x_3 - x_1 + \alpha, y_3 - y_1 + \beta)、$$
$$P_3(x_4 + x_1 - \alpha, y_4 + y_1 - \beta)、$$
$$P_4(x_5 - x_1 + \alpha, y_5 - y_1 + \beta)、$$
$$P_5(x_6 + x_1 - \alpha, y_6 + y_1 - \beta)，$$

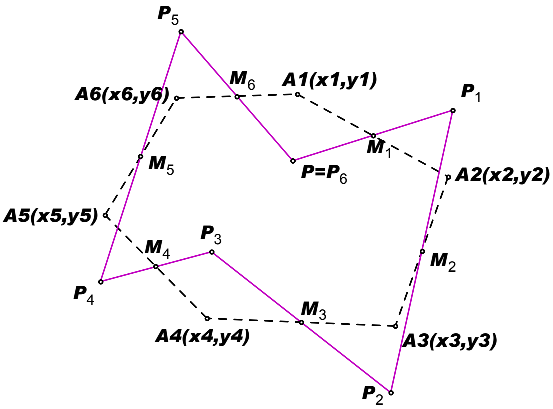
最後得到 $P_6(\alpha, \beta)$，恰爲起始點 P 的坐標。所以，無法利用中心對稱的幾何變換方法來求出原六邊形。

總之，對於任意的 n 邊形 $A_1A_2 \ldots A_n$，($n \geq 3$)，令各頂點坐標爲 $A_i(x_i, y_i)$，$i = 1 \sim n$，設 P 爲異於各邊中點 M_1、$M_2 \cdots M_n$ 的任意點，那麼以 $M_i (i = 1 \sim n-1)$ 爲對稱中心所求得的對稱點爲

$$P_i(x_{i+1} - (-1)^i x_1 + (-1)^i \alpha, y_{i+1} - (-1)^i y_1 + (-1)^i \beta)，$$

最後 P_{n-1} 以 M_n 爲對稱中心所求得的對稱點爲：(1)當 n 爲奇數時，P_n 的坐標爲 $(2x_1 - \alpha, 2y_1 - \beta)$，所以 A_1 必爲 $\overline{PP_n}$ 的中點。

(2)當 n 爲偶數時，P_n 的坐標爲 (α,β)，恰爲起始點 P 的坐標。因此，能利用中心對稱的幾何變換方法來「尋找失落的 n 邊形」的邊數一定是奇數邊，而且不管是凸 n 邊形或是凹 n 邊形都試用喔！

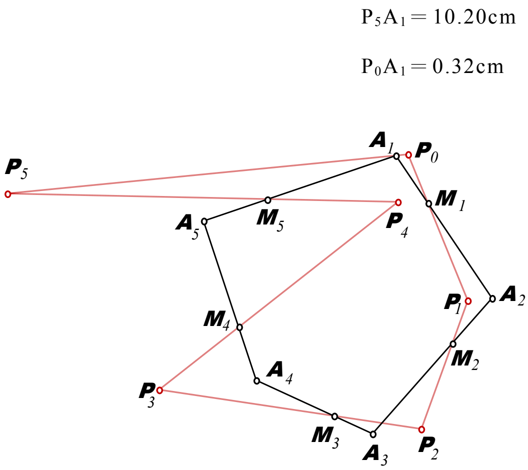


圖六

其次，在國中課程中已學過的相關內容有「連接任意三角形各邊中點所形成的三角形的周長爲原三角形周長的一半」、「連接任意四邊形各邊的中點所形成的四邊形的周長爲原四邊形的兩對角線長之和」；還有從前面的討論過程中，我們也可以發現「連接任意五邊形各邊的中點所形成的五邊形的周長爲原五邊形的所有對角線長總和的一半」的性質。

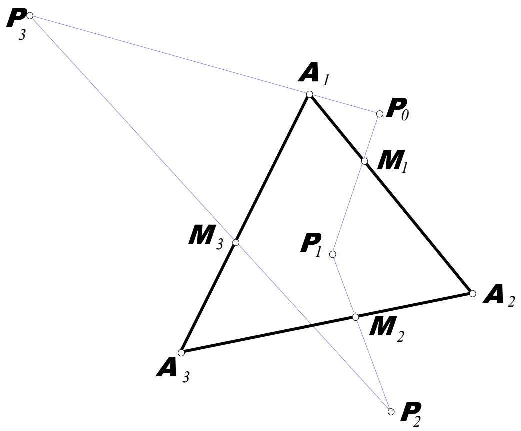
肆、改變各邊的分點比例「還原」出原 *n* 邊形

在(圖五)中，我取 M_i 爲各邊的中點，也就是 $\overline{A_iM_i}:\overline{A_{i+1}M_i}=1:1$ ($i=1\sim n$，n 爲奇數；其中 $A_{n+1}=A_1$)；其實，我們也可以改變它們的比例爲 $\overline{A_iM_i}:\overline{A_{i+1}M_i}=1:r$，這時也要取 $\overline{P_{i-1}M_i}:\overline{P_iM_i}=1:r$ (設起始點 $P=P_0$)，那麼 n 邊形的頂點 A_1 會落在 $\overline{P_0P_n}$ 上，且滿足 $\overline{P_nA_1}:\overline{P_0A_1}=r^n:1$。現在我取 $n=5$，$r=2$ 爲例作圖說明(見圖七)如下，從圖中數據資料可知 $\overline{P_5A_1}:\overline{P_0A_1}=32:1$，我想這樣大家應該會更清楚這個結果吧！



圖七

事實上，我們是可以改變各邊的分點比例爲任意比例的，當然也要稍微調整一下作法，就可「還原」出原 n 邊形，我以三角形(見圖八)爲例作圖說明如下：今設定 $\overline{A_1M_1}:\overline{A_2M_1}=1:2$、$\overline{A_2M_2}:\overline{A_3M_2}=2:3$、$\overline{A_3M_3}:\overline{A_1M_3}=3:4$，取 P_0 爲異於 M_1、M_2、M_3 的任意點，且滿足 $\overline{P_0M_1}:\overline{P_1M_1}=1:2$、$\overline{P_1M_2}:\overline{P_2M_2}=2:3$、$\overline{P_2M_3}:\overline{P_3M_3}=3:4$，那麼頂點 A_1 會落在 $\overline{P_0P_3}$ 上，且滿足 $\overline{P_3A_1}:\overline{P_0A_1}=4:1$。理由是因爲 $\Delta A_1P_0M_1\sim\Delta A_2P_1M_1$、$\Delta A_2P_1M_2\sim\Delta A_3P_2M_2$、$\Delta A_3P_2M_3\sim\Delta A_1P_3M_3$，利用對應邊成比例的性質，因此 $\overline{P_0A_1}:\overline{P_1A_2}:\overline{P_2A_3}:\overline{P_3A_1}=1:2:3:4$。



P_0M_1=1.00 cm

P_1M_1=2.00 cm

P_1M_2=1.36 cm

P_2M_2=2.04 cm

P_2M_3=4.70 cm

P_3M_3=6.27 cm

P_3A_1=6.03 cm

P_0A_1=1.51 cm

圖八

我們來回顧一下(圖五)的情形，頂點 A_1 以 M_1 作中心對稱變換落到頂點 A_2 的位置，頂點 A_2 再以 M_2 作中心對稱變換落到頂點 A_3 的位置…，同樣地，我們所取的任意點 P 以 M_1 作中心對稱變換落到 P_1 的位置…；在這個過程中，由於在中心對稱下，一雙對應向量是線段大小相同且方向相反，所以 $\overrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftarrow{P_1A_2}$ 是大小相同且反向…，最後同理可得 $\overrightarrow{A_1P}$ 與 $\overleftarrow{P_5A_1}$ 也是大小相同且反向，因此頂點 A_1 恰為 $\overline{PP_5}$ 的中點。我們另從全等的角度來看，因為 $\Delta A_1PM_1 \cong \Delta A_2P_1M_1$、$\Delta A_2P_1M_2 \cong \Delta A_3P_2M_2$ …、$\Delta A_5P_4M_5 \cong \Delta A_1P_5M_5$，所以 $\overline{A_1P} = \overline{A_1P_5}$。

同樣地，我們再回頭看看(圖七)的情形，也不難發現原來 $\Delta A_1P_0M_1 \sim \Delta A_2P_1M_1$、$\Delta A_2P_1M_2 \sim \Delta A_3P_2M_2$…、$\Delta A_5P_4M_5 \sim \Delta A_1P_5M_5$，因為邊長比例為 $1:r$，所以最後可推得 $\overline{P_5A_1}:\overline{P_0A_1} = r^5:1$。推廣這個想法在 n 邊形上(n 為奇數)，我們當然可以隨心所欲地改變各個邊長的分點比例 $1:r$，只要掌握作圖的關鍵是使得 $\Delta A_1P_0M_1 \sim \Delta A_2P_1M_1$、$\Delta A_2P_1M_2 \sim \Delta A_3P_2M_2$..、$\Delta A_nP_{n-1}M_n \sim \Delta A_1P_nM_n$ 即可，至於 $\overline{P_nA_1}:\overline{P_0A_1}$ 的比例也只要稍加計算一下便可輕易地知道了！

參考文獻

蔣聲　著　1944 年　幾何變換　凡異出版社　P.25~P.26