

# 圓柱形棒磁鐵與圓環形薄片磁鐵之間的磁作用力

周章<sup>1</sup> 蔡尚芳<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup> 私立吳鳳科技大學 國際企業管理系

<sup>2</sup> 私立吳鳳科技大學 電機工程系

## 壹、引言

在一般高中與大學的物理課程中，通常多半是利用必歐-沙伐(Biot-Savart)定律(余健治、陳家駒、閔振發、褚德三、蔣亨進、蔡尚芳，2006；Crummett & Western，1994；Halliday & Resnick，1988；Serway & Jewett Jr.，2010；Wolfson & Pasachoff，1999)來計算電流所產生的磁場，以闡釋磁性物體的磁作用力與磁現象；但這種處理方式，由於牽涉到較高深的數學技巧，對大多數高中學生而言，實際上是很難理解或運用的，也因此無法有效用來解決與磁鐵有關的問題。但如將磁鐵視為是由許多磁偶極子所組成，則可利用磁偶極子的磁場公式，經由相當簡單的基本向量運算，對與磁鐵有關的磁作用力與磁現象，做相當深入而定量化的探討(蔡尚芳，2002)。

本文即利用上述模型，針對 2010 年 7 月 17 日至 25 日在克羅埃西亞舉行的國際物理奧林匹亞競賽實驗第二大題(41st International Physics Olympiad, 2010)，進行理論分析，並將理論與實驗結果，做一

比較，以驗證兩者的一致性，並供國內高中物理教學與有志參加各類國際物理競賽之學生參考。

以下的討論，假設 $z$ 軸方向取為鉛直向上，如圖 1 所示，並以 $\hat{x}$ 、 $\hat{y}$ 、 $\hat{z}$ 分別代表一直角坐標系沿三個坐標軸方向的單位向量。

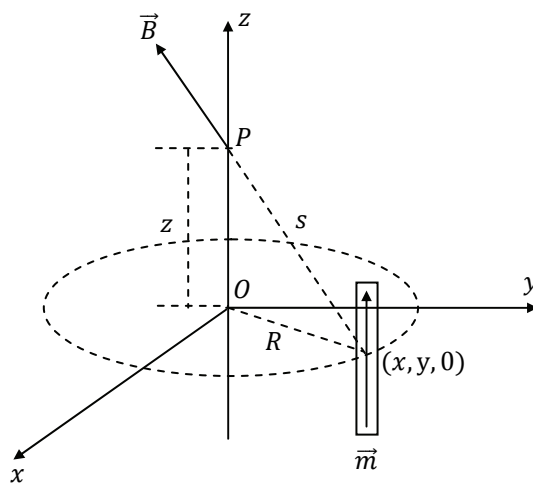


圖 1、磁偶極子在直角坐標系中的位置

## 貳、磁偶極子所產生的磁場

對於一個體積可忽略、磁偶極矩(簡稱磁矩)為 $\vec{m}$ 的磁偶極子，當空間中一點 $P$ 相

\*為本文通訊作者

對於此磁偶極子的位置向量  $\vec{s}$  不為零時，此磁偶極子在  $P$  點所產生的磁場  $\vec{B}$  可根據蔡尙芳(2002)中(6)式結果(Griffiths, 1989; Jackson, 1975; Reitz, Milford & Christy, 1993)，求得其為

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{1}{s^3} \left\{ \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{s})\vec{s}}{s^2} - \vec{m} \right\}, \quad (1)$$

上式中， $s = |\vec{s}|$  為磁偶極子到  $P$  點的距離， $\mu_0$  為真空的磁導率。

如圖 1 所示，考慮一磁偶極子在坐標為  $(0,0,z)$  的  $P$  點所產生的磁場。假設此磁偶極子位於  $xy$  平面上一個半徑為  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$  的圓上，其坐標為  $(x,y,0)$ ，磁矩為  $\vec{m} = m\hat{z}$ ，則此磁偶極子至  $P$  點的相對位置向量為  $\vec{s} = -x\hat{x} - y\hat{y} + z\hat{z}$ ，且  $s^2 = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + z^2$ ，而純量積  $\vec{m} \cdot \vec{s} = mz$ 。根據(1)

式，此磁偶極子在  $P$  點所產生的磁場為

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{m}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ \left( \frac{3z^2}{R^2 + z^2} - 1 \right) \hat{z} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{3z}{R^2 + z^2} \right) (x\hat{x} + y\hat{y}) \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

上式顯示磁場  $\vec{B}$  的  $z$  分量為

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{3z^2}{R^2 + z^2} - 1 \right). \end{aligned} \quad (3)$$

圖 2 所示為  $B_z(z)$  以  $\mu_0 m / (4\pi R^3)$  為單位時，隨  $z/R$  的變化； $B_z(z)$  的極小值出現在  $z = 0$ ，而極大值則位於  $z/R = \pm\sqrt{3/2}$ 。由圖 2 或(3)式可看出  $B_z(z) = B_z(-z)$ 。

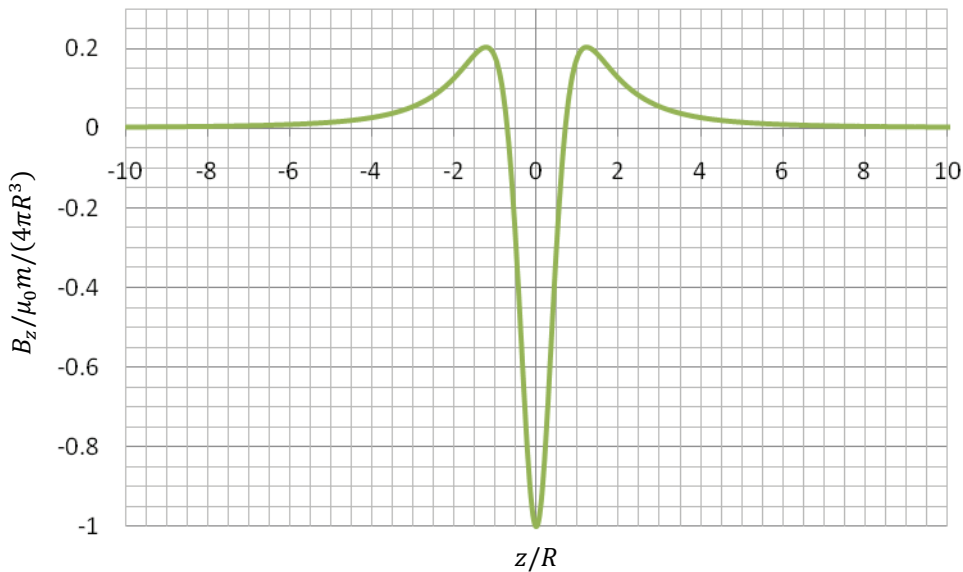


圖 2、磁偶極子在  $z$  軸上產生的磁場鉛直分量

### 參、均勻細圓環磁鐵所產生的磁場

(3)式的結果可以很容易的推廣到一個位於 $xy$ 平面的均勻細圓環磁鐵。

假設此一磁鐵的中心位於原點，圓環半徑為 $R$ ，總磁矩為 $\vec{m} = m\hat{z}$ 。我們將此磁鐵視為係由均勻分布於圓環上的 $N$ 個磁偶極子所組成( $N \gg 1$ )，所有磁偶極子的磁矩總和與此磁鐵的總磁矩相等，即 $(\sum_{i=1}^N m_i)\hat{z} = m\hat{z}$ ，其中 $m_i\hat{z}$ 為第 $i$ 個磁偶極子的磁矩。

由(3)式可求得第 $i$ 個磁偶極子在 $z$ 軸上坐標為 $(0,0,z)$ 處所產生的磁場 $z$ 分量為

$$B_{iz}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_i}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{3z^2}{R^2 + z^2} - 1 \right). \quad (4)$$

依磁場的疊加原理，所有 $B_{iz}(z)$ 的總和即為細圓環磁鐵在 $(0,0,z)$ 處所產生的磁場的 $z$ 分量，故得

$$B_z(z) = \sum_{i=1}^N B_{iz}(z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\sum_{i=1}^N m_i)}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{3z^2}{R^2 + z^2} - 1 \right).$$

實際上因為 $m = \sum_{i=1}^N m_i$ ，故上式結果與(3)式完全相同。

若細圓環磁鐵的磁矩沿著圓環均勻分布，則由(2)式與對稱性考量，可知位於圓環任一直徑兩端的一對磁偶極子，因其坐標分別為 $(x, y, 0)$ 與 $(-x, -y, 0)$ ，故兩者在 $z$ 軸上一點所產生的磁場，其 $x$ 分量或 $y$ 分量

彼此正負相消。故均勻細圓環磁鐵在 $z$ 軸上所產生的磁場 $\vec{B}$ 只有 $z$ 分量，即 $\vec{B} = B_z(z)\hat{z}$ ，而得

$$\begin{aligned} \vec{B} &= B_z(z)\hat{z} \\ &= \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{m}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{3z^2}{R^2 + z^2} - 1 \right) \hat{z}. \end{aligned} \quad (5)$$

### 肆、均勻圓環形薄片磁鐵所產生的磁場

如圖 3 所示的中空圓環形薄片磁鐵，位於 $xy$ 平面，內徑為 $r$ ，外徑為 $R$ ，總磁矩為 $\vec{m} = m\hat{z}$ 。因假設此磁鐵為均勻，故其每單位面積的磁矩 $\vec{\sigma}$ ，等於其總磁矩與總面積之比，即

$$\vec{\sigma} = \sigma\hat{z} = \frac{m}{\pi(R^2 - r^2)}\hat{z}. \quad (6)$$

如圖 3 所示，此磁鐵在半徑 $\rho$ 到 $\rho + d\rho$ 的部分( $d\rho \ll \rho$ )，可近似為半徑為 $\rho$ 的細圓環磁鐵，故適用(5)式的磁場公式。由於此部分的面積為 $2\pi\rho d\rho$ ，故其所具有的磁矩為

$$(dm)\hat{z} = (2\pi\rho d\rho)\vec{\sigma} = \frac{2m\rho d\rho}{(R^2 - r^2)}\hat{z}. \quad (7)$$

由(5)式可得此部分的磁鐵在 $z$ 軸上坐標為 $(0,0,z)$ 處所產生的磁場 $z$ 分量為

$$\begin{aligned} dB_z(z) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dm}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{3z^2}{\rho^2 + z^2} - 1 \right) \\ &= \frac{\mu_0 (2\rho d\rho)m}{4\pi (R^2 - r^2)} \left( \frac{3z^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (8)$$

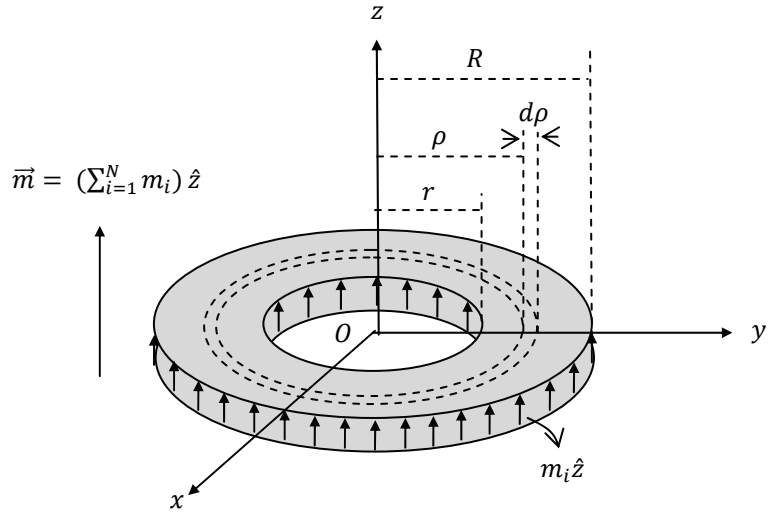


圖 3、均勻圓環形薄片磁鐵示意圖

將上式對半徑 $\rho$ 積分後，可求得整片磁鐵所產生的磁場 $z$ 分量為

$$\begin{aligned}
 B_z(z) &= \frac{\mu_0 m}{4\pi(R^2 - r^2)} \int_r^R (2\rho d\rho) \left( \frac{3z^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\
 &= \frac{\mu_0 m}{2\pi(R^2 - r^2)} \left( \frac{-z^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \Bigg|_{\rho=r}^{\rho=R} \\
 &= \frac{\mu_0 m}{2\pi(R^2 - r^2)} \left\{ \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^2}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

圖 4a 與圖 4b 所示為上式之 $B_z(z)$ 以 $\mu_0 m / (4\pi R^3)$ 為單位時，隨 $z/R$ 的變化。由此二圖或(9)式，可看出 $B_z(z) = B_z(-z)$ ，且不論比值 $r/R$ 為何， $B_z(z)$ 的極小值恆出現在 $z = 0$ ，而極大值則出現在 $|z/R| < \sqrt{3/2}$ 。

一如預期，當 $r/R \rightarrow 1$ 時，磁鐵可近似為一細圓環，故圖 4a 趨近於圖 2；而由圖 4b 可看出，當 $r/R$ 趨近於零時， $B_z(z)$ 的極大值會出現在愈靠近 $z = 0$ 的地方，而此時在 $z = 0$ 處的 $B_z(z)$ ，其絕對值也變得愈大。

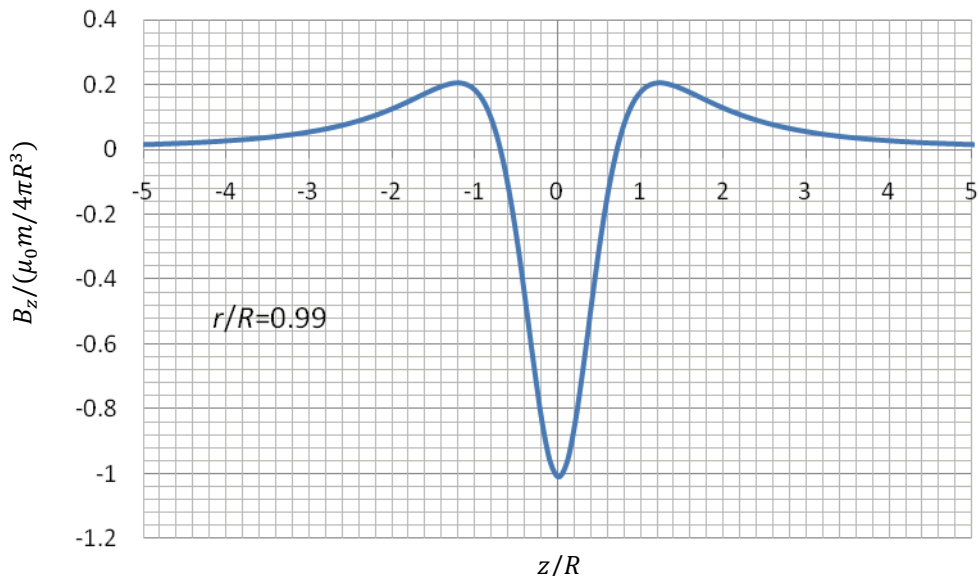


圖 4a、圓環形薄片磁鐵產生的磁場分量 $B_z(z)(r/R = 0.99)$

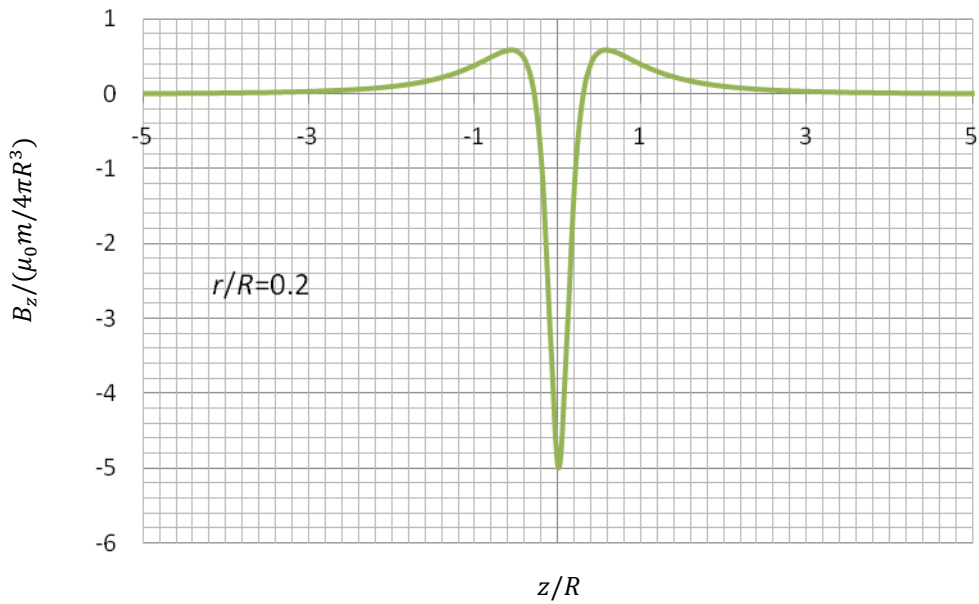


圖 4b、圓環形薄片磁鐵產生的磁場分量 $B_z(z)(r/R = 0.2)$

### 伍、磁場對棒磁鐵的磁作用力

根據蔡尙芳(2002)的(7b)式，棒磁鐵可視為是由位於N極的正磁荷(亦稱磁極強度或極強) $+q_m$ ，與位於S極的負磁荷 $-q_m$ 所組成。若負磁荷 $-q_m$ 至正磁荷 $+q_m$ 的位移向量為 $\vec{b}$ ，則此棒磁鐵的磁矩 $\vec{\mu}$ 等於磁荷 $q_m$ 與位移 $\vec{b}$ 的乘積，即

$$\vec{\mu} = q_m \vec{b}. \quad (10)$$

此外，由蔡尙芳(2002)的(9b)式，可知當磁荷 $\pm q_m$ 在磁場 $\vec{B}$ 中時，其所受到的磁作用力為

$$\vec{F}_{\pm} = \pm q_m \vec{B}. \quad (11)$$

假設如圖 5 所示，中空圓環形薄片磁鐵位於 $xy$ 平面，內徑為 $r$ ，外徑為 $R$ ，總磁矩為 $\vec{m} = m\hat{z}$ ，而棒磁鐵只能沿 $z$ 軸自由移動，其中心點 $C$ 的坐標為 $(0,0,z)$ ，S極到N極

的位移為 $\vec{b} = (2a)\hat{z}$ ，磁矩為 $\vec{\mu} = q_m \vec{b} = 2q_m a\hat{z}$ 。

依據(9)式，圓環形薄片磁鐵在棒磁鐵的S極與N極所產生的磁場分別為 $B_z(z-a)\hat{z}$ 與 $B_z(z+a)\hat{z}$ ，故由(10)與(11)式得棒磁鐵受到的磁作用力 $\vec{F}$ 為

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F(z)\hat{z} = q_m \{B_z(z+a) - B_z(z-a)\}\hat{z} \\ &= \{F_+(z) - F_-(z)\}\hat{z} \end{aligned} \quad (12)$$

上式中 $F_+(z)$ 與 $F_-(z)$ 分別為作用於N極與S極的磁力分量，其定義式如下：

$$\begin{aligned} F_{\pm}(z) &= q_m B_z(z \pm a) = q_m B_{\pm}(z) \\ &= q_m \frac{\mu_0 m}{2\pi(R^2 - r^2)} \left\{ \frac{R^2}{[R^2 + (z \pm a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{[r^2 + (z \pm a)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

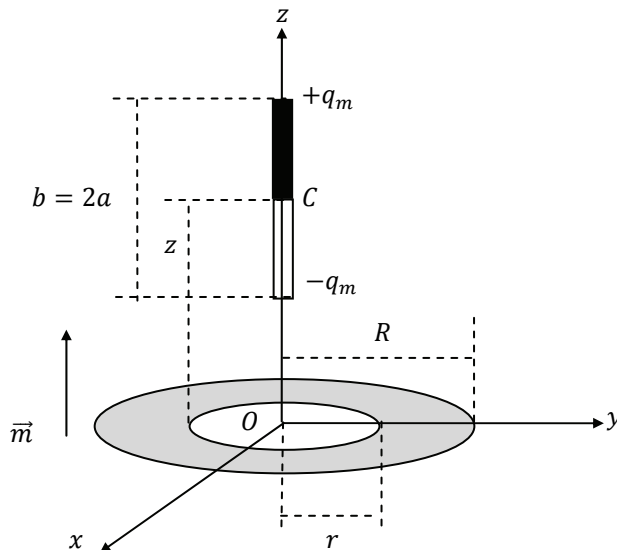


圖 5、中空圓環形薄片磁鐵與棒磁鐵的位置關係

由(13)式可看出每單位磁荷受到的力  $B_+ = F_+(z)/q_m$  或  $B_- = F_-(z)/q_m$ ，其隨棒磁鐵中心點坐標  $z$  的變化，與(9)式之  $B_z(z)$  完

全相同，只是  $z$  坐標的原點分別左移或右移一段距離  $a = b/2$  而已(參見圖 4a)，如圖 6 與圖 7 所示。

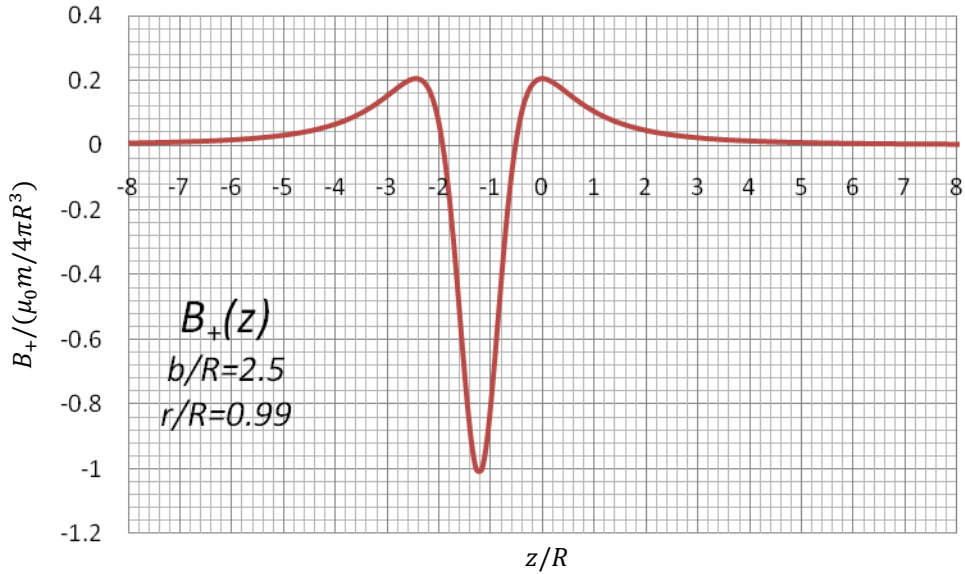


圖 6、棒磁鐵N極每單位磁荷受到的力(磁鐵的  $b/R = 2.5, r/R = 0.99$ )

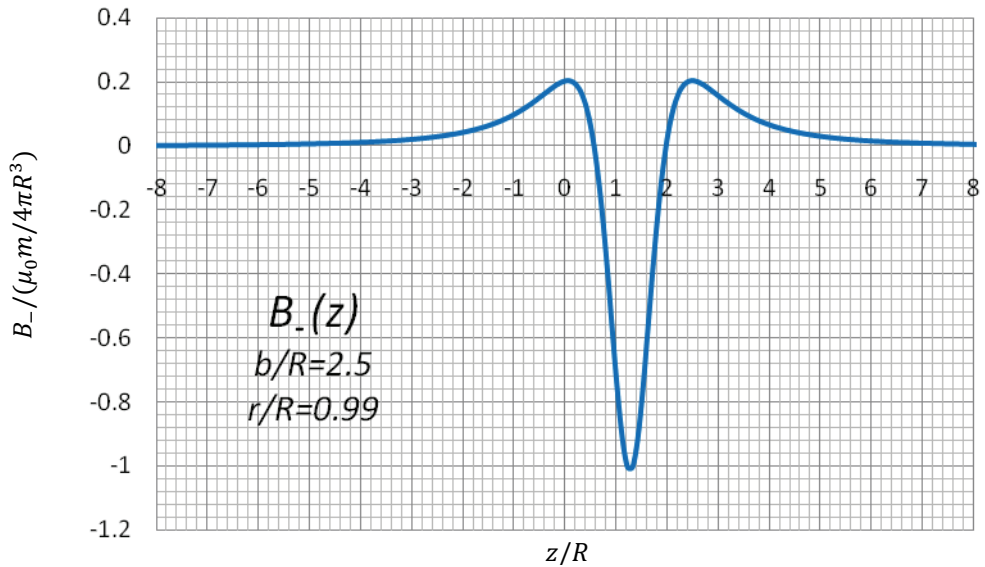


圖 7、棒磁鐵S極每單位磁荷受到的力(磁鐵的  $b/R = 2.5, r/R = 0.99$ )

依據(12)與(13)式，將圖 6 與圖 7 的曲線相減，即得棒磁鐵每單位磁荷所受到來自圓環形薄片磁鐵的磁作用力，如圖 8 所示。

圖 8 中， $b/R = 2.5$ ， $r/R = 0.99$ ，故近似於細圓環形磁鐵的情形。此時在  $z/R = \pm 2$  的位置上，棒磁鐵所受的磁力為零，而接近此二位置時的磁力，呈現類似

彈簧力的恢復力特性，故此二位置為穩定平衡點；而在  $z = 0$  的位置，則為中性平衡點。

當圓環形薄片磁鐵內徑與外徑的比  $r/R$  夠小時(參見圖 4b)，在  $z = 0$  的位置，也會轉變成爲穩定平衡點，並另外出現兩個不穩定平衡點，介於相鄰的兩平衡點之間，如圖 9 所示。

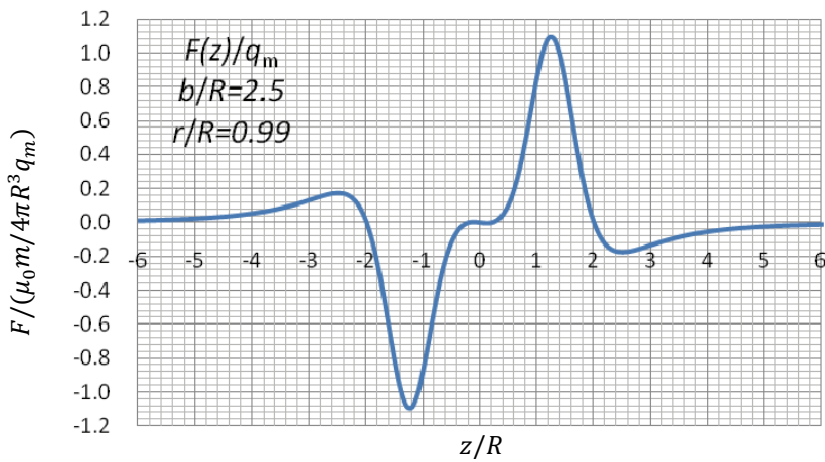


圖 8、棒磁鐵每單位磁荷受到的淨力(磁鐵的  $b/R = 2.5$ ,  $r/R = 0.99$ )

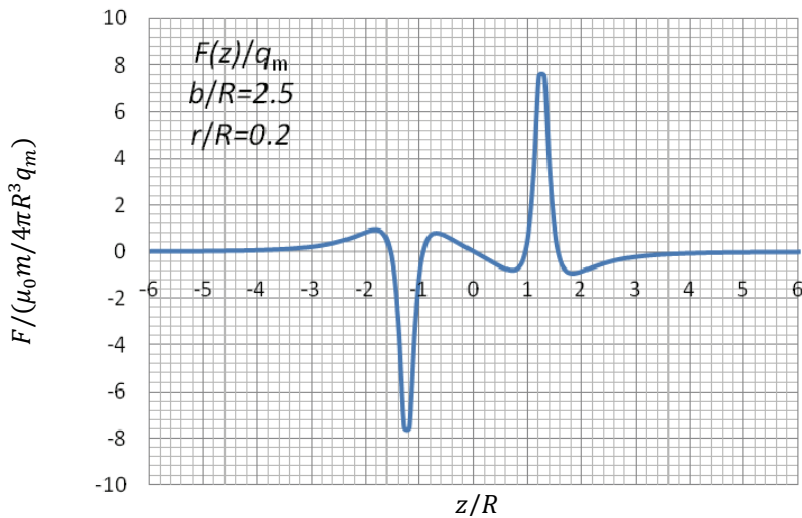


圖 9、棒磁鐵每單位磁荷受到的淨力(磁鐵的  $b/R = 2.5$ ,  $r/R = 0.2$ )



當  $b/R \ll 1$  時，棒磁鐵可近似為點狀的磁偶極子，此時其受力的情形如圖 10 與圖 11 所示。在此情況下，不論圓環形薄片磁鐵內徑與外徑的比  $r/R$  為何，穩定平衡的位

置有二，但  $z = 0$  的位置則為不穩定平衡。

由 (12) 式或圖 8 ~ 11，可看出  $F(z) = -F(-z)$ 。

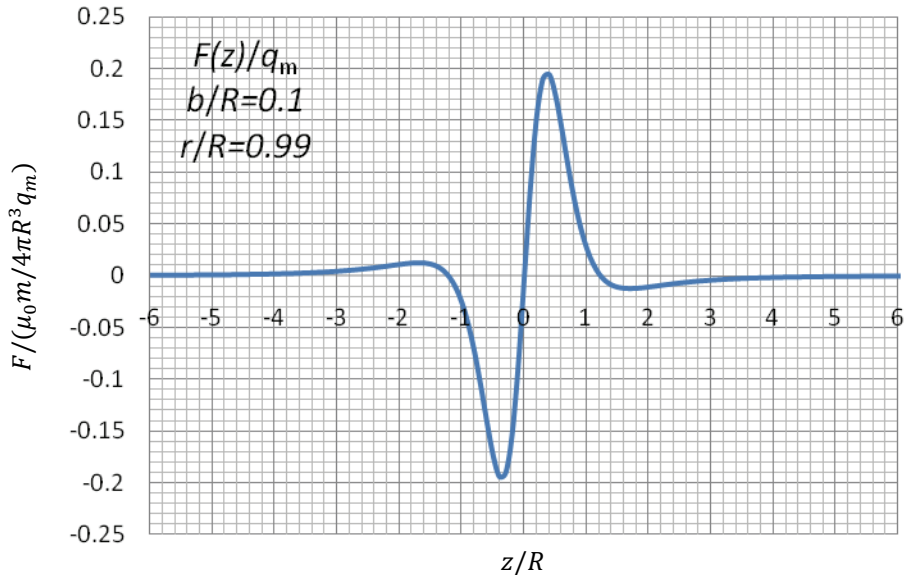


圖 10、磁偶極子每單位磁荷受到的淨力(磁鐵的  $b/R = 0.1$ ,  $r/R = 0.99$ )

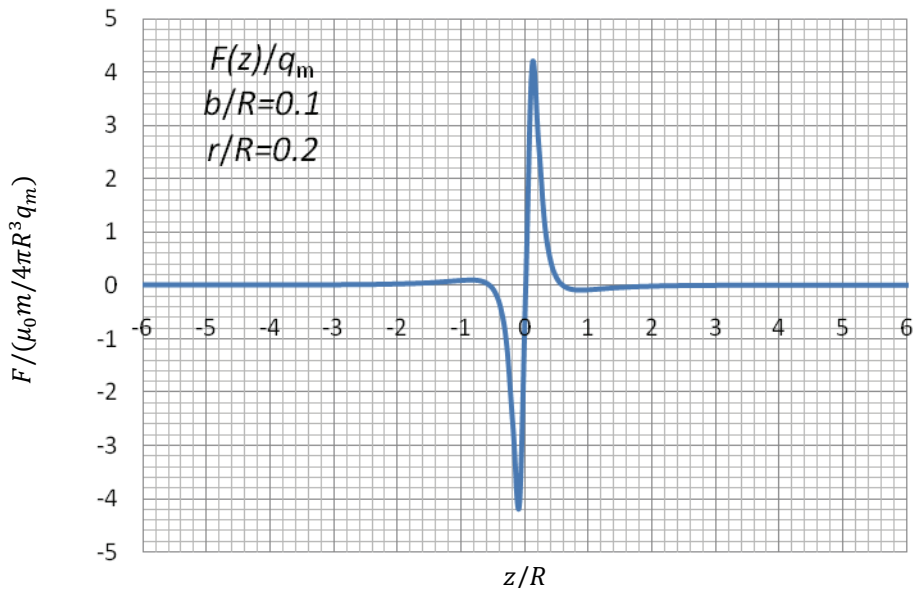


圖 11、磁偶極子每單位磁荷受到的淨力(磁鐵的  $b/R = 0.1$ ,  $r/R = 0.2$ )

## 陸、理論與實驗結果的比較

第 41 屆國際物理奧林匹亞競賽實驗第 2 題的裝置如圖 12 與圖 13 所示(41st International Physics Olympiad, 2010, Experimental problem 2)。圓環形薄片磁鐵固定於一個透明的圓筒頂端，棒磁鐵則可沿圓筒中心的鉛直通道移動，其所受的磁作用力以圖 13 所示的磅秤裝置量得。

主辦單位所公布的解答(41st International Physics Olympiad, 2010, Experimental problem 2)，包含利用對稱性所得的 $z \geq 0$ 的實驗數據(如圖 14)與全部 $z$ 值的磁作用力曲線(如圖 15)。在此二圖中，

$F_{\uparrow\uparrow}(z)$ 代表兩磁鐵的磁矩彼此同向平行時棒磁鐵受到的磁作用力，此與本文以上所考慮的情形是相同的，故 $F_{\uparrow\uparrow}(z)$ 與(12)式中之 $F(z)$ 相同。除了坐標軸使用的單位不同外，圖 14 與圖 9 顯然完全一致。

在大學普通物理或高中物理課程中，有關磁鐵及其作用力的理論與實驗，並不常見，本次國際物理奧林匹亞競賽的這個實驗，可以說是相當深入淺出的一項創作，尤其難能可貴的是整個實驗使用的只是一些常見的儀器裝置，一般學生也可以適度掌握其相關的物理理論，因此是值得在國內物理教學上，特別加以介紹推廣的。



圖 12、磁鐵裝置

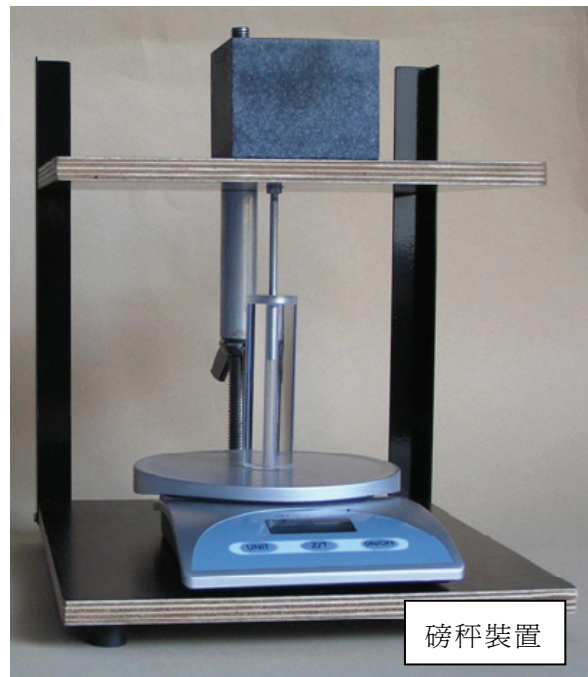


圖 13、磅秤裝置

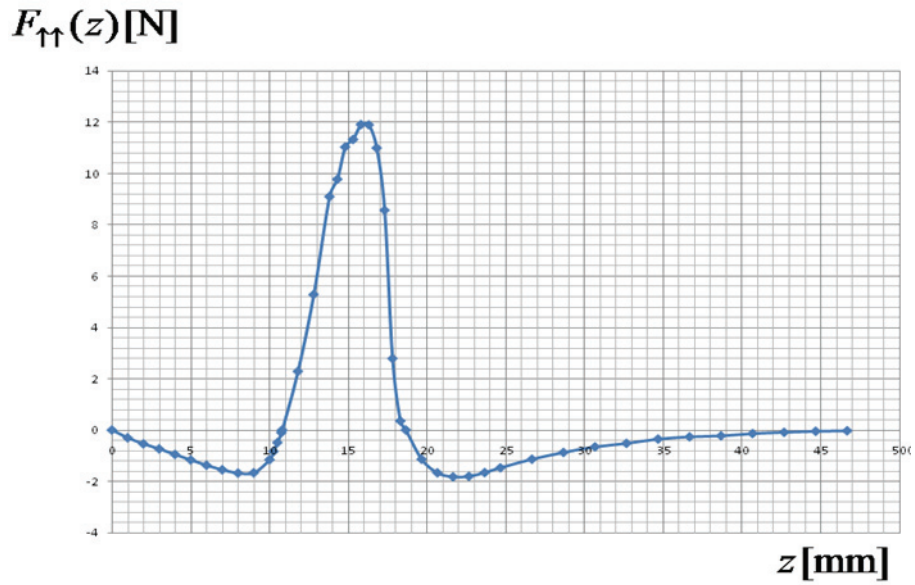


圖 14、兩磁鐵之磁矩同向時的磁作用力曲線與實驗數據( $z \geq 0$ )

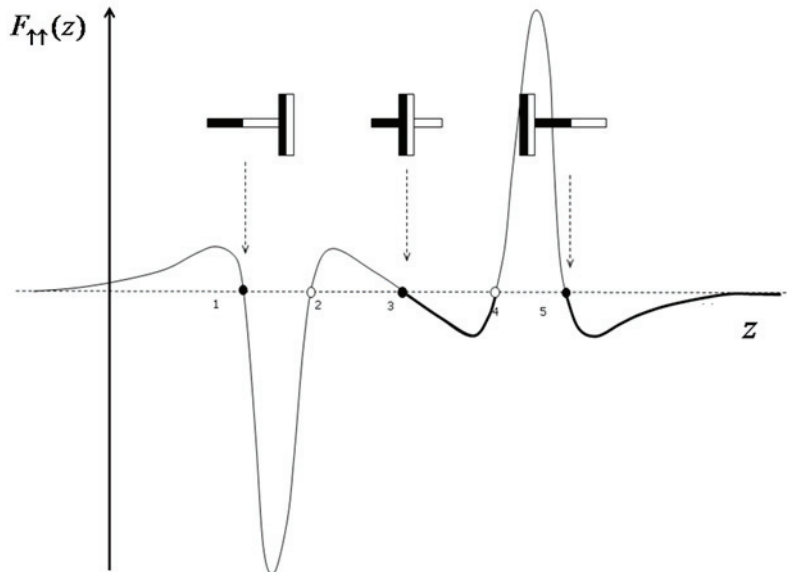


圖 15、兩磁鐵之磁矩同向時的磁作用力曲線(全部 $z$ 值)

## 參考文獻

- 余健治、陳家駒、閔振發、褚德三、蔣亭進、蔡尙芳(2006)：普通物理。台北市，東華。
- 蔡尙芳(2002)：磁鐵的極強、磁矩與磁場，科學教育月刊 250(6), 31-37.
- 41st International Physics Olympiad (2010), Experimental problem 2: Forces between magnets, concepts of stability and symmetry: 2010 年 8 月 2 日，取材自 <http://ipho2010.hfd.hr/file/Problems/EXPPProblem2-text.pdf> & <http://ipho2010.hfd.hr/file/Problems/EXPPProblem2-Solution.pdf>.
- Crummett, W. P. & Western, A. B. (1994). *University physics*. Dubuque, IA: Wm. C. Brown Communications.
- Griffiths, David J. (1989). *Introduction to electrodynamics* (2nd ed.). New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- Halliday, D. & Resnick, R. (1988). *Fundamentals of physics* (Extended 3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Jackson, J. D. (1975). *Classical electrodynamics* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.
- Reitz, John R., Milford, Frederick J. & Christy, Robert W. (1993). *Foundations of electromagnetic theory* (4<sup>th</sup> ed.) Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.
- Serway, R. A. & Jewett Jr., J. W. (2010). *Physics for scientists and engineers with modern physics* (8<sup>th</sup> ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.
- Wolfson, R. & Pasachoff, J. M. (1999). *Physics with modern physics for scientists and engineers* (3rd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.