數學課堂討論日誌--特殊化解題討論

曾富美

苗栗縣私立建台高級中學

壹、前言

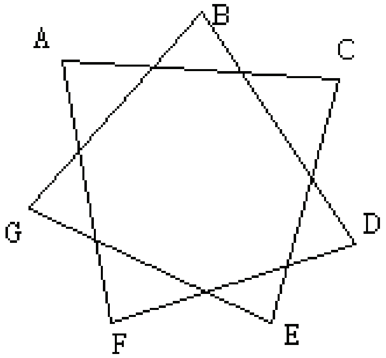
在教育的問題上，經常聽到「要求標準答案會扼殺學生的多元創意與思考力」，我認爲阻礙學生的創意思考與學習樂趣的是「標準解法」，不是「標準答案」。

本人以下列一則教學日誌，顯示課堂上若遇到可以發揮的問題，則多元觀點的討論是可行的。這是七年前一個 55 人的國三班級，幾個參與討論的同學程度大約是高分、及格上下、始終不及格。

貳、日誌一則

今天一考完苗栗全縣大會考數學科，他們就立刻提出幾題有疑問的題目要求講解。當討論到七角星形時，

題目：如圖一，求七個角度數總和。

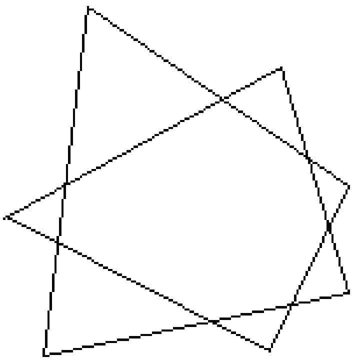


圖一

怡瑋說：「這題阿源是用圓來算喔！可以嗎？」

易暘說：「當然不可以喔！」

孫百說：「當然可以喔！這樣畫也是七角星形啊！」（如圖二）



圖二

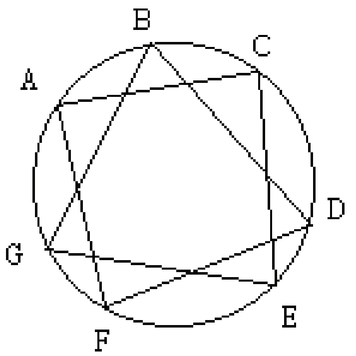
易暘仍堅持說：「可是這個題目又不是這樣畫！你不能亂改題目。」

孫百總愛跟他抬槓說：「可是題目也沒說不可以這樣畫啊！」

怡瑋也加入戰局說：「對啊！題目只是要求算七個角的和，又沒有限制線段長短，只要是這樣一筆劃連成七角星形，總和都一樣吧？」

我說：「阿源，你怎麼算的呢？我們先來看看你的做法。」他的做法

如下(圖三)：



圖三

$$\angle A=\frac{1}{2}(CD\text{ 弧}+DE\text{ 弧}+EF\text{ 弧})$$

$$\angle B=\frac{1}{2}(DE\text{ 弧}+EF\text{ 弧}+FG\text{ 弧})$$

$$\angle C=\frac{1}{2}(EF\text{ 弧}+FG\text{ 弧}+GA\text{ 弧})$$

$$\angle D=\frac{1}{2}(FG\text{ 弧}+GA\text{ 弧}+AB\text{ 弧})$$

$$\angle E=\frac{1}{2}(GA\text{ 弧}+AB\text{ 弧}+BC\text{ 弧})$$

$$\angle F=\frac{1}{2}(AB\text{ 弧}+BC\text{ 弧}+CD\text{ 弧})$$

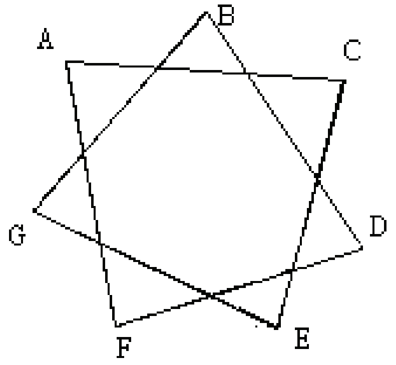
$$\angle G=\frac{1}{2}(BC\text{ 弧}+CD\text{ 弧}+DE\text{ 弧})$$

$$\begin{aligned}&\angle A+\ldots+\angle G\\&=\frac{3}{2}(CD\text{ 弧}+DE\text{ 弧}+EF\text{ 弧}+FG\text{ 弧}\\&\quad+GA\text{ 弧}+AB\text{ 弧}+BC\text{弧})\\&=540^\circ\end{aligned}$$

我說：「很好的做法！」

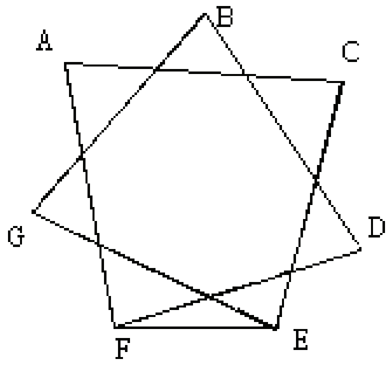
易暘仍不死心地說：「如果不能畫在圓上呢？答案會一樣嗎？」

我說：「如果不在圓上，像這樣凹凹凸凸的圖形(如圖四)要怎麼處理？」



圖四

怡瑋說：「把它補起來！」(如圖五)



圖五

我問：「補起來之後呢？」

怡瑋說:「那 ACEF 是四邊形內角和 360 度。」

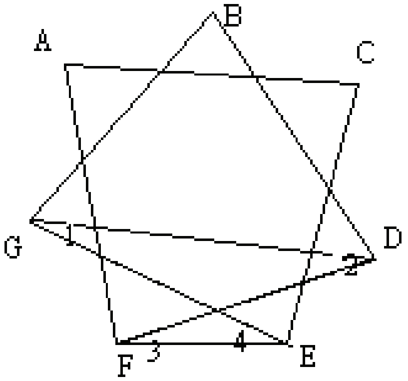
易暘插嘴說：「你多算了兩個小角！」

怡瑋說：「你別吵啦！」

孫百喊說：「我知道了！再補一條線！」(如圖六)

易暘還沒有仔細看圖想想，就嚷著：「圖形更亂了！」

孫百說：「你沒看到啊！」



圖六

易暘仔細看了圖，說：「喔！對喔！八字型！$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$，剛剛好！」

所以，得到 360+180=540

易暘喃喃自語說：「好奇怪！怎麼答案剛好跟阿源算的一樣。」

我問他：「我們剛剛的解題過程中，跟角 A 的大小有沒有關係？」

他說：「沒有！」

「角 B 呢？」

「也沒有！」

「其他的角呢？」

「都沒有！」

我說：「一個幾何問題如果你畫的圖與其它人畫的圖都符合題目的條件，但你們的圖卻都不一樣，這代表什麼？」

「有人畫錯了！」

「大家都對！」

「不行啦！大家都對不就有很多答案嗎！怎麼可能有很多答案！」

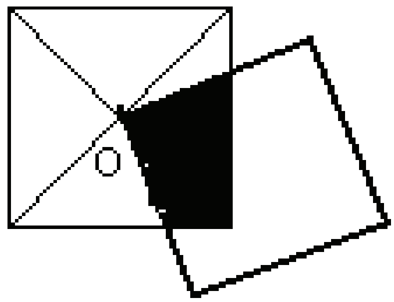
「誰說圖形不一樣就有很多答案？它也可能只有一個答案！」

「你看半圓上的三角形有無限多個，但每個都是直角三角形。」

我說：「這代表符合條件的圖本來就有很多可能。而當它的答案只有一種的時候，將圖形特殊化並不影響它的答案，但卻可以使我們方便計算。若是答案隨著圖形而有不同，就不能以某個特殊化的圖來求完整的解。」

這時阿源又提出另一個問題：「那麼這個題目也可以特殊化嗎？」

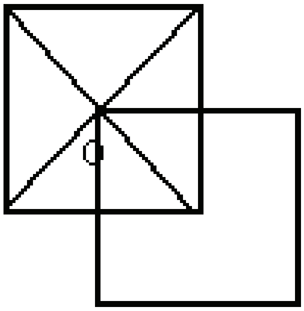
題目：如圖七，兩個大小相同的正方形邊長 2，其中一個對角線交點 O, 另一個以頂點置於 O，為旋轉中心進行旋轉，則圖七兩正方形重疊部分的面積大小為何？



圖七

我說：「題目只要求以 O 為中心旋轉，並沒有規定旋轉幾度？所以你會怎麼做旋轉？」

孫百搶著說：「轉這樣最好！」(如圖八)



圖八

易暘也搶著說：「我知道！四分之一！特殊化真有用！」

孫百說：「馬後砲！」兩個人繼續鬥嘴。

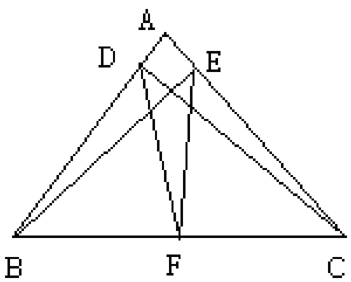
我問：「可不可以證明不管轉幾度，都是四分之一嗎？」

易暘與孫百搶著說：「當然可以！」

下課鐘響起，我說：「下次上課，你們兩個要告訴我，怎麼證明。」

我走出教室，怡瑋跟著走出來，拿著考題說：「這題你剛才解過，但是我現在想到它是不是也可以用特殊化？」

題目：如圖九，ΔABC，$\angle DFE = 40°$，$\overline{BE} \perp \overline{AC}$，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，F 是 $\overline{BC}$ 中點，求 $\angle A$ 的度數。



圖九

她說：「老師你是利用直角三角形外心性質，以及等腰就算出 $\angle A$=70 度。考試的時候，我也有想到 F 是中點，也有看到直角，但沒有想到 F 是 ΔDBC 與 ΔEBC 的外心。現在我想把 ΔABC 畫成特殊的三角形，或許會比較好算。」

我問：「你能將題目特殊化而不違反題目條件嗎？」

她說：「可以！題目只要求 $\angle DFE = 40°$、$\overline{BE} \perp \overline{AC}$，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$、F 是 $\overline{BC}$ 中點。現在我想，如果我把 ΔABC 畫成等腰，$\angle B = \angle C$ 並不違反條件。」

我說：「你可以算算看啊！」

她說：「圖形是左右對稱，所以….」

她在圖形上填寫了

$$\angle DFB = \angle EFC = \frac{1}{2}(180° - 40°) = 70°$$

然後又說：「因為 F 是 ΔDBC 的外心，所以 $\overline{FD} = \overline{FB}$，因此 $\angle DBF = 55°$。同理 $\angle ECF = 55°$，因此得 $\angle A = 70°$」

她自言自語地說：「我好像用到你上課講的外心性質喔！這樣特殊化就沒有意義了嘛!」

我說：「這題的重點的確在於能看到直角三角形及斜邊中點的關係，但是特殊化之後，用 55 度這個數字來計算，比用 x，y 來假設更讓人有繼續算下去的信心，不是嗎？」

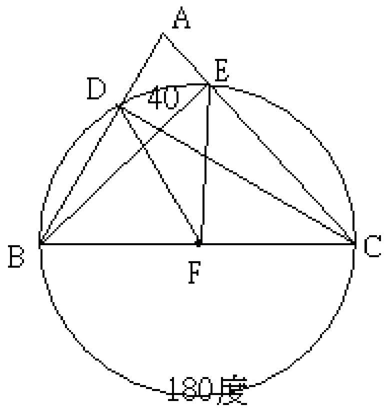
她笑著說：「那麼，我的想法是不錯的喔！」

這時候孫百過來說：「這題我有更簡單的做法！」他把圖(如圖十)拿給我看。

易暘嚷著說：「你的不對啦！怎麼可以畫圓！」

我說：「F 是 ΔDBC 與 ΔEBC 的外心啊！」

易暘說：「喔！是喔！我懂了！」



圖十

參、為什麼要特殊化

我認爲國中階段，幾何的問題最能啓發學生進行討論。一個題目可以有很多種解法，上課時都是盡可能以學生的想法來進行，而不是以我的想法進行討論。所以常常可以得到多種解法，對問題相關的概念聯想很有幫助。上述的課堂討論就是以學生阿源的特殊化解法進行解題討論，對於程度較差的學生有鼓勵的作用。

我認爲面對幾何問題，如果學生願意根據題意中的條件重新作圖，就會發現圖形的唯一性或多樣性。若是眾人所畫的圖是全等圖，也就是「唯一」一種圖，那就無法進行「特殊化」，三角形的全等性質就源於此。若眾人所畫之圖各有差異卻都符合題意條件，而且問題的答案是「唯一」，則此時選擇容易處理的圖形所得的解答即是那「唯一」解。當答案明顯不「唯一」的時候，用「特殊化」進行初步的思考也是有益的。然而學生多半懶得重新畫圖，或者不敢突破題目所提供的參考圖形，最後淪爲「放棄」數學。

代數中的比例問題也可以將分母設訂爲 1，求其分子，則可容易求得比例。例如：

(1) 若實數 x, y 符合 $x^2 - xy - y^2 = 0$，求 $\dfrac{x}{y}$ = ?

(2) 若黃金矩形的長寬爲 x, y，且 $x > y$，求長比寬之比值。

肆、結語

每年接觸國一新生時都發現一個矛盾的現象，他們會告訴我「討厭數學」，但卻又很喜歡上台做練習、發表意見。我很懷疑他們討厭的不是數學，而是數學考試成績帶來的責備、處罰、補習加強學習。我也懷疑他們不是害怕數學，而是害怕那些奇怪的符號，以及老師要求的標準解題程序，他們害怕「猜想」，最後淪爲放棄「想」，而只剩下亂「猜」。

鼓勵學生對問題進行「特殊化」與「猜想」，常常可以發現他們對自己解題的信心增強了，上課的態度也比較積極，他們至少可以開始改說「我不喜歡數學，但我喜歡上數學課」，有一天他們或許會喜歡數學。