煙囪可以完全排出煙氣的最小高度

周章[1] 蔡尚芳[2]*

[1]私立吳鳳科技大學 國際企業管理系

[2]私立吳鳳科技大學 電機工程系

壹、引言

一般大學普通物理學與高中物理課程，在討論有關流體的物理現象時，通常多半假設針對液體(即不可壓縮流體)所導出的白努利方程式可以適用，然後藉由所得結果與實際現象或實驗正好有相當的符合，來強化或主張其所用的方法，在物理上是說得通的；但考慮的流體如果是具有壓縮性的氣體，則此方程式是否仍可以適用，或使用此方程式所得的結果為何與實驗相符，則鮮少從理論層次，更深入的加以探究分析。

最近一個這類問題的例子，就是 2010 年第 41 屆國際物理奧林匹亞競賽的理論第 2 題(41st International Physics Olympiad，2010)。此為一個關於煙囪高度與其煙氣排放量之關係的問題，原題所作的假設之一即是煙氣為不可壓縮流體，因此適用常見的不可壓縮流體的白努利方程式；但回答此一問題所需的較完整理論，其實並未超出該項競賽的課綱範疇，在 2002 年國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊複選考試中有關噴嘴的試題、蔡尚芳(2007)、Symon(1971)中，都有相關的公式推導與舉例說明。

針對此一與煙囪物理有關的競賽試題，本文中將推導可壓縮流體的白努利方程式，並據以分析完全排放煙氣所需的煙囪最低高度，一方面可以與該題公布的解答做一比較，以評估其結果的可靠性，另一方面也可以作為國內大學普通物理或高中物理教學的參考。

除了因為將煙氣視為可壓縮的氣體，以致所用的白努利公式多了流體的內能項之外，本文對此問題的解法，表面上看來與原題另有以下的不同。在本問題中，要找出煙囪的最低高度前，必須先證明(或至少說明)煙囪要完全排出煙氣為何存在有一個最低高度的要求。針對這點，本文所用的不等式條件，是在煙囪出口處的煙氣壓力必須大於同一高度處的大氣壓力，而非原解答所用的，出口煙氣體積流量必須大於爐內所產生的煙氣體積流量(41st International Physics Olympiad，2010)。

由於原題假設煙氣為不可壓縮氣體，在密度固定不變下，在其所用的條件中，體積流量與質量流量是等價而可互換的；但在本文中，依據穩流與質量守恆的要求，該項有關質量流量的不等式條件乃是無法成立的，必須改正為等式。雖然如此，原題所導出的煙囪最低高度公式，卻仍舊與

*為本文通訊作者

本文所得者完全相符，其理由另於本文(參、討論與結論)中說明。

貳、問題與解答

如圖 1 所示，以坐標 z 代表沿鉛直方向的高度。假設一個焚化爐(或其他種類的火爐)產生的煙氣，從高度爲$z_1 = 0$的煙囪進口(截面 1)，以可近似爲準靜態絕熱過程的穩流，通過煙囪管，上升至高度爲$z_2 = h$的出口(截面 2)，排放至空氣中。

假設煙氣爲理想流體，遵守理想氣體定律，其莫耳定壓比熱 c_P與莫耳定容比熱 c_V之比值爲γ。在高度爲 z_1的進口處，煙氣之壓力、質量密度、速率、溫度、截面積分別爲 p_1、ρ_1、v_1、T_1、A_1，而在高度爲 z_2的出口處則爲 p_2、ρ_2、v_2、T_2、A_2。

一、試求每單位質量之煙氣在煙囪管道出口與進口處之動能差(答案以γ、ρ_1、p_1、p_2、z_1、z_2與重力加速度g表示)。

【解】:

此處回答這個問題所用的理論，基本上是與蔡尚芳(2007)相同的，但在本題中因煙囪內的煙氣是沿鉛直方向流動，必須考慮重力對流體的作用，也就是在考慮能量守恆時，必須將重力位能納入，這與蔡尚芳(2007)所討論的無重力作用下的流體運動有別，因此以下將相關公式重新推導，兼以方便閱讀與了解。

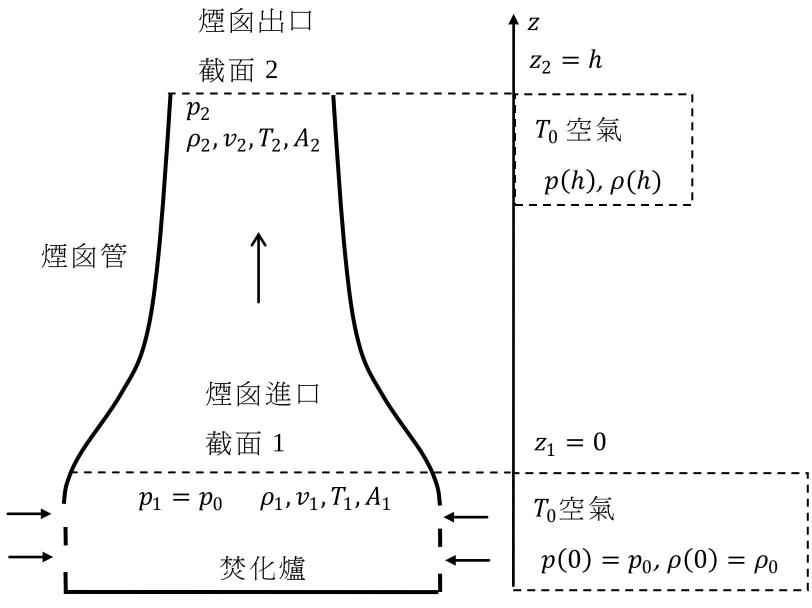

圖 1

考慮質量爲 m 的一團煙氣，設其壓力爲p，絕對溫度爲T，體積爲V，質量密度爲ρ，莫耳數爲n。若一莫耳煙氣之質量爲 M (即煙氣的平均分子量)，則由理想氣體方程式可得

$$RT = p\frac{V}{n} = p\left(\frac{V}{nM}\right)M$$

$$= p\left(\frac{V}{m}\right)M = \frac{p}{\rho}M, \qquad (1)$$

上式中，R爲理想氣體常數。

如圖 1 所示，煙氣以速率v_1由進口(截面 1)進入，以速率v_2由出口(截面 2)流出，截面 1 與 2 之截面積分別爲 A_1與A_2。假設在dt時間內，流入截面 1 之煙氣，其質量與體積分別爲dm與 dV_1，流出截面 2 之質量與體積分別爲dm'與dV_2，則因煙氣爲穩流，其質量須守恆，故流出截面 2 之質量$dm' = dm$。

設在dt時間內，靜液壓力在截面 1 與截面 2 對dm之煙氣所做之總功爲dW，則由功與質量密度的定義得

$$dW = p_1A_1(v_1dt) - p_2A_2(v_2dt)$$

$$= p_1dV_1 - p_2dV_2 = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)dm. \qquad (2)$$

另外，由(1)式可得

$$\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{R}{M}(T_1 - T_2). \qquad (3)$$

若以u_1與u_2分別代表煙氣在進口與出口處每單位質量之內能，則因煙氣由截面 1 流動到截面 2 爲絕熱過程，與周圍沒有熱量的交換，故可根據(2)式與熱力學第一定律，得如下之功-能關係式：

$$\frac{dW}{dm} = \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}$$

$$= u_2 - u_1 + \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) + g(z_2 - z_1). \quad (4)$$

注意(4)式之結果，須假設煙氣在煙囪內經歷的是絕熱過程，否則(4)式左邊尚需加上每單位質量的煙氣，在煙囪內每單位時間與其週圍交換的熱量。此外，(4)式經移項整理後，亦可改寫爲均勻理想流體在絕熱狀況下所適用之白努利方程式(余健治、陳家駒、閔振發、褚德三、蔣亨進、蔡尚芳，2006；Crummett & Western，1994；Halliday & Resnick，1988；Serway & Jewett Jr.，2010；Wolfson & Pasachoff，1999)：

$$u_1 + \frac{1}{2}v_1^2 + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1}$$

$$= u_2 + \frac{1}{2}v_2^2 + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2}\ . \qquad (5)$$

因假設煙氣爲理想氣體，故其定容與定壓下之莫耳比熱 c_V與 c_P有如下關係(余健治、陳家駒、閔振發、褚德三、蔣亨進、蔡尚芳，2006；Crummett & Western，1994；Halliday & Resnick，1988；Serway & Jewett Jr.，2010；Wolfson & Pasachoff，1999)：

$$c_P - c_V = (\gamma - 1)\, c_V = R, \qquad (6)$$

而其每單位質量之內能差則爲

$$u_2 - u_1 = \frac{c_V}{M}(T_2 - T_1). \qquad (7)$$

利用(6)式與(3)式，可將(7)式之結果改寫爲

$$u_2-u_1=\frac{c_V}{R}\cdot\frac{R}{M}(T_2-T_1)$$

$$=\frac{1}{\gamma-1}\cdot\left(\frac{p_2}{\rho_2}-\frac{p_1}{\rho_1}\right). \tag{8}$$

因$z_2-z_1=h$，故由(4)式與(8)式可得

$$\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)$$

$$=\left(\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{p_2}{\rho_2}\right)-(u_2-u_1)-gh$$

$$=\frac{1}{1-1/\gamma}\left(\frac{p_1}{\rho_1}-\frac{p_2}{\rho_2}\right)-gh. \tag{9}$$

注意：由(8)式可看出，若令$\gamma\to\infty$，則 $u_2=u_1$，即流體的內能變化爲零，此情形相當於流體爲不可壓縮，或流體的溫度變化可以忽略(即$T_2=T_1$)；(9)式在$\gamma\to\infty$的極限情況下，即爲不可壓縮流體的白努利方程式。

另外，因假設煙氣之流動爲準靜態絕熱過程，故有(余健治、陳家駒、閔振發、褚德三、蔣亨進、蔡尚芳，2006；Crummett & Western，1994；Halliday & Resnick，1988；Serway & Jewett Jr.，2010；Wolfson & Pasachoff，1999)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1/\gamma}. \tag{10}$$

由上式可再度看出，當$\gamma\to\infty$時，$\rho_1=\rho_2$，即流體爲不可壓縮。

由(9)、(10)兩式可得每單位質量之煙氣在出口處與進口處之動能差爲

$$\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)$$

$$=\frac{1}{1-1/\gamma}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma}\right]-gh. \tag{11}$$

若煙氣爲不可壓縮流體，則可於上式中令$\gamma\to\infty$ 而得

$$\frac{1}{2}(v_2^2-v_1^2)=\frac{p_1}{\rho_1}\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right]-gh. \tag{12}$$

二、以M代表空氣的平均分子量，以$p(z)$代表在高度z處的大氣壓力。若在煙囪進口處每單位時間通過的煙氣體積爲B，則在下列(a)、(b)、(c)三項假設下，要將煙氣完全由煙囪出口排出時，煙囪的最低高度$h_{\min}$爲何？

(a) 煙囪外的大氣可視爲溫度固定爲T_0的理想氣體。

(b) 煙氣的平均分子量等於空氣的平均分子量M。

(c) 在煙囪進口處的煙氣，其壓力 p_1 等於同一高度處$z=0$的大氣壓力，即 $p_1=p(0)=p_0$ (注：此項假設代表實際上截面 1 爲煙囪的中性壓力面，並不一定就是煙囪底部的截面)。

【解】：

當空氣處於平衡時，煙囪外大氣壓力$p(z)$與密度$\rho(z)$隨高度z的變化可利用(1)式表示爲

$$dp(z)=-\rho(z)gdz=-\frac{Mg}{RT_0}p(z)dz. \tag{13}$$

上式經積分後，再利用(1)式，可求得等溫下的大氣壓力近似公式，即

$$p(z)=p_0e^{-\left(\frac{Mg}{RT_0}\right)z}\approx p_0\left[1-\left(\frac{Mg}{RT_0}\right)z\right]$$

$$=p_0\left[1-\left(\frac{\rho_0 g}{p_0}\right)z\right], \qquad (14)$$

式中ρ爲空氣在壓力p_0、溫度T_0時的密度。由(11)式可得

$$v_2=\sqrt{\frac{2}{1-1/\gamma}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-1/\gamma}\right]-2gh+v_1^2}. \qquad (15)$$

設每單位時間通過進口(截面 1)與出口(截面 2)的氣體質量分別爲ϕ_1與ϕ_2，則

$$\phi_1=\rho_1 v_1 A_1,\phi_2=\rho_2 v_2 A_2, B=v_1 A_1. \qquad (16)$$

因煙氣以穩流通過煙囪，故因煙氣以穩流通過煙囪，故$\phi_1=\phi_2$，由(11)、(15)與(16)式可得，由(11)、(15)與(16)式可得

$$\rho_1 B=\rho_2 A_2 v_2=\rho_1\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)A_2\sqrt{\frac{2}{1-\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]-2gh+\left(\frac{B}{A_1}\right)^2}. \qquad (17)$$

將上式的最左邊與最右邊平方並整理後，利用(10)式可得

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{2}{\gamma}}\left(\frac{B}{A_2}\right)^2=\frac{2}{1-\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left[1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}}\right]-2gh+\left(\frac{B}{A_1}\right)^2. \qquad (18)$$

設令

$$\kappa=\frac{p_1-p_2}{p_1}=1-\frac{p_2}{p_1},\quad \alpha=\frac{1}{\gamma}, \qquad (19)$$

則(18)式成爲

$$(1-\kappa)^{-2\alpha}\left(\frac{B}{A_2}\right)^2=\frac{2}{1-\alpha}\frac{p_1}{\rho_1}\left[1-(1-\kappa)^{1-\alpha}\right]-2gh+\left(\frac{B}{A_1}\right)^2 \qquad (20)$$

注意：通常以$\kappa p_1=p_1-p_2$來代表煙囪效應。

將(20)式中各因子就κ展開，並保留至κ的一次方項，則可得以下之近似式：

$$(1+2\alpha\kappa)\left(\frac{B}{A_2}\right)^2=2\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\kappa-2gh+\left(\frac{B}{A_1}\right)^2. \qquad (21)$$

故在$\kappa\ll 1$的近似下，得κ須滿足下式：

$$\kappa=\frac{gh+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{B}{A_2}\right)^2-\left(\frac{B}{A_1}\right)^2\right]}{\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)-\alpha\left(\frac{B}{A_2}\right)^2}. \qquad (22)$$

若要將爐內的煙氣完全由煙囪出口排出，則煙氣在煙囪出口的壓力p_2必須大於出口高度的空氣壓力$p(h)$。此條件可利用(14)、(19)兩式表示爲

$$p_2=p_1(1-\kappa)>p(h)\approx p_0\left[1-\left(\frac{\rho_0 g}{p_0}\right)h\right], \qquad (23)$$

而因$p_1=p_0$，故由上式得

$$\kappa < \left(\frac{\rho_0 g}{p_0}\right) h. \tag{24}$$

由(22)、(24)兩式得

$$\left(\frac{\rho_0 g}{p_0}\right) h > \frac{gh + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{B}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{B}{A_1}\right)^2\right]}{\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right) - \alpha\left(\frac{B}{A_2}\right)^2}, \tag{25}$$

亦即

$$h > \frac{\frac{1}{2g}\left[\left(\frac{B}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{B}{A_1}\right)^2\right]}{\left[\left(\frac{p_1}{\rho_1}\right)\left(\frac{\rho_0}{p_0}\right) - \alpha\left(\frac{\rho_0}{p_0}\right)\left(\frac{B}{A_2}\right)^2\right] - 1}. \tag{26}$$

故利用(1)式，可將上式右邊的分母改用溫度表示，而得煙囪的最低高度爲

$$h_{\min} = \frac{\frac{1}{2g}\left[\left(\frac{B}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{B}{A_1}\right)^2\right]}{\left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \alpha\left(\frac{M}{RT_0}\right)\left(\frac{B}{A_2}\right)^2\right] - 1}. \tag{27}$$

由(16)式中$B = v_1 A_1$的關係，可將(27)式改寫成

$$h_{\min} = \frac{\frac{1}{2g}\left[\left(\frac{B}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{B}{A_1}\right)^2\right]}{\left[\left(\frac{T_1}{T_0}\right) - \alpha\left(\frac{Mv_1^2}{RT_0}\right)\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right] - 1}. \tag{28}$$

若大氣中空氣分子熱運動的均方速率以v_0^2表示(余健治、陳家駒、閔振發、褚德三、蔣亨進、蔡尚芳，2006；Crummett & Western，1994；Halliday & Resnick，1988；Serway & Jewett Jr.，2010；Wolfson & Pasachoff，1999)，即

$$\frac{1}{2}Mv_0^2 = \frac{3}{2}RT_0 \tag{29}$$

則得

$$\frac{Mv_1^2}{RT_0} = \frac{3v_1^2}{v_0^2} \tag{30}$$

在一般情況下，煙氣流入煙囪進口的速率遠小於空氣分子熱運動的速率，即$v_1^2 \ll v_0^2$，故由(30)式可看出(28)式分母中含α的項可予忽略，而得

$$h_{\min} = \frac{\frac{1}{2g}\left[\left(\frac{B}{A_2}\right)^2 - \left(\frac{B}{A_1}\right)^2\right]}{\frac{T_1}{T_0} - 1}$$

$$= \frac{1}{2g}\left(\frac{B}{A_2}\right)^2 \frac{T_0}{T_1 - T_0}\left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right]. \tag{31}$$

注意：(31)式亦可在假設煙氣爲不可壓縮流體(即$\gamma \to \infty$或$\alpha \to 0$)的條件下，由(28)式直接導出。由於(31)式右邊最後一個因子，在一般煙囪的設計中大約爲 1，故此結果與原題解答所給的公式，基本上可以說是相同的。

參、討論與結論

一、原解答的(5)式(41st International Physics Olympiad，2010)，雖然提到出口煙氣體積(或質量)流量，必須大於爐內所產生的煙氣體積(或質量)流量，但實際上在求煙囪最小高度時，對應到的條件還是兩流量相等的情形，也就是煙氣的質量流量是守恆的，而與本文(17)式一致，因此並不會造成其所得到的結果出現錯誤；只是爲什麼煙囪高度會存在有一個最小值的理由，被錯誤的歸因於(5)式中的不等式而已。

原題解答在其(2)式後的敘述中，提到煙囪最低高度條件爲煙囪出口處的煙氣壓力，必須大於或等於同一高度處的大氣壓力，其實這才是煙囪高度存在有一最低值的正確理由。這一關鍵的解題條件，也就是本文的(23)式，而本文(26)式也明白顯示這個條件，的確會導致煙囪高度存在有一個最低值。

二、由本文分析所得的結果，即(28)式與(31)式，可以看出在本問題中，煙氣確實可近似爲不可壓縮的流體。比較此二式的差異，乃在(28)式中多出來一個含有$\alpha = 1/\gamma$的修正項，此一修正項是將煙氣視爲可壓縮氣體而出現的效應。但由(30)式可以看出，除非煙氣在煙囪進口的流速，大到接近於常溫下空氣分子熱運動速率(約 500 m/s)的數量級，否則即使煙氣是氣體，也可以忽略其可壓縮性的效應。

基本上在煙囪中的煙氣流動，是由煙囪管內煙氣與管外空氣的壓力差造成的，也就是所謂的煙囪效應。這個壓力差與大氣壓力的比，實際就是(19)式定義的κ，而由(24)式可得

$$\kappa < \frac{\rho_0 gh}{p_0} = \frac{Mgh}{RT_0}$$

$$= \frac{28 \times 10^{-3} \times 10^2}{8.31 \times 300} \sim 10^{-3}. \qquad (32)$$

故煙氣因偏離其最初平衡態(壓力爲$p_1 = p_0$)而受到的壓縮形變，可以說是極其微小而不用考慮的。同理，這也造成出現在(30)式中與流體動能有關的比值，其數量級與κ相當，而可不用考慮前述與其對應的α修正項；換言之，煙氣的可壓縮性在本問題中確實是可以忽略的。

肆、參考文獻

余健治、陳家駒、閔振發、褚德三、蔣亨進、蔡尚芳(2006)：**普通物理**。台北市，東華。

蔡尚芳(2007)：和平號太空站頻譜艙上的破洞大小*(The Size of a Crack on the Spectr Module of the Mir Space Station)*，科學教育月刊 297(4), 16-21.

41st International Physics Olympiad (2010), Theoretical exam, problem 2: Chimney physics: 2010年8月7日，取材自 http://ipho2010.hfd.hr/file/Problems/THProblem2-text.pdf & http://ipho2010.hfd.hr/file/Problems/THProblem2-Solution.pdf.

Crummett, W. P. & Western, A. B. (1994). *University physics.* Dubuque, IA: Wm. C. Brown Communications.

Halliday, D. & Resnick, R. (1988). *Fundamentals of physics* (Extended 3rd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Serway, R. A. & Jewett Jr., J. W. (2010). *Physics for scientists and engineers with modern physics* (8th ed.). Belmont, CA: Brooks/Cole, Cengage Learning.

Symon, K. R. (1971). *Mechanics* (3rd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.

Wolfson, R. & Pasachoff, J. M. (1999). *Physics with modern physics for scientists and engineers* (3rd ed.). Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company.