中學生通訊解題第七十五期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
7501

a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 這五個數是從 98,99,100,101,102 中取出的五個相異正整數，而且 $3a_1^3+2a_2^3+a_3^3+2a_4^3+3a_5^3$ 個位數字為 7，加上 $|a_2-a_4|>1$，試問 $|a_2-a_4|$ 為多少？

參考解答：

因為 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 這五個數是從 98,99,100,101,102 中取出的五個相異正整數，所以

$$\begin{aligned}&a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3\\&=98^3+99^3+100^3+101^3+102^3\end{aligned}$$

的個位數字為 0，再配合題意，得

$$\begin{aligned}&a_1^3-a_3^3+a_5^3\\&=(3a_1^3+2a_2^3+a_3^3+2a_4^3+3a_5^3)\\&-2(a_1^3+a_2^3+a_3^3+a_4^3+a_5^3)\end{aligned}$$

的個位數字也是 7，而 $a_1^3,a_2^3,a_3^3,a_4^3,a_5^3$ 的個位數分別為 0,1,2,8,9，以下列出所有的可能性

a_1^3	9	8	8	0	9	0	8	1
a_3^3	0	0	1	1	2	2	2	2
a_5^3	8	9	0	8	0	9	1	8

再配合 $|a_2-a_4|>1$，只剩下上述表格的前二種情形，因此 $|a_2-a_4|=3$，以下逐一列出：

$$\begin{aligned}&(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)=\\&(99,98,100,101,102),(99,101,100,98,102),\\&(102,98,100,101,99),(102,101,100,98,99)\end{aligned}$$

解題評註：

滿多的同學是利用奇數和偶數來做分類，判斷出 a_2,a_4 是一個奇數、一個偶數，加上題目中的 $|a_2-a_4|>1$，所以得知 $|a_2-a_4|=3$，這是很好的觀察！如果可以再列出符合題意的 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 這五個數，那會更加完整。

問題編號
7502

在袋中有紅球、白球各 100 個，每次從中取出一個球，

1. 若爲紅球即得 1 分，白球不計分，滿足下列任一條件即停止：
   (1)得分達 5 分，(2)取出球數達 10 個。試問取球過程會出現幾種不同的方法？
2. 若計分方式改爲紅球即得 1 分，白球扣 1 分，則取球過程會出現幾種不同的方法？

參考解答： 1. 638 種　2. 938 種

1. (1) 得 5 分：即必須抽出 5 個紅球，白球最多出現 5 個，且最後一個必須爲紅球：

   (a) 白球 0 個：1 種

   (b) 白球 1 個：5 種

   (c) 白球 2 個：$\frac{6!}{4!\cdot 2!}=15$ 種

   (d) 白球 3 個：$\frac{7!}{4!\cdot 3!}=35$ 種

   (e) 白球 4 個：$\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$ 種

   (f) 白球 5 個：$\frac{9!}{4!\cdot 5!}=126$ 種

   共 1+5+15+35+70+126= 252 種

   (2) 得 4 分：即必須抽出 4 個紅球及 6 個白球：$\frac{10!}{4!\cdot 6!}=210$ 種

   (3) 得 3 分：即必須抽出 3 個紅球及 7 個白球：$\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120$ 種

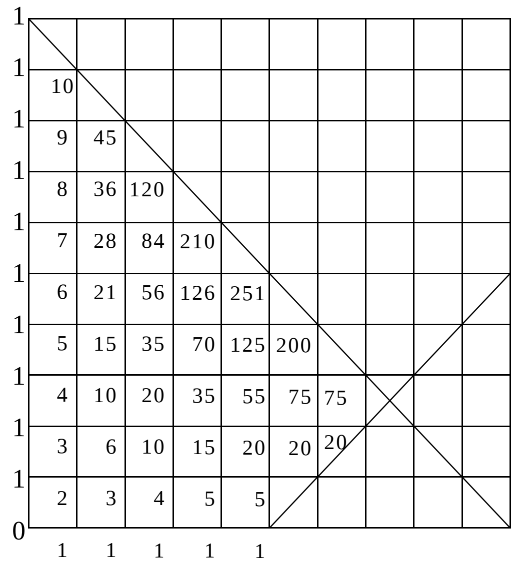
   (4) 得 2 分：即必須抽出 2 個紅球及 8 個白球：$\frac{10!}{2!\cdot 8!}=45$ 種

   (5) 得 1 分：即必須抽出 1 個紅球及 9 個白球：10 種

   (6) 得 0 分：即必須抽出 10 個白球：共 1 種

   總共 252+210+120+45+10+1=638 種

2. 假設取球的過程中，取出紅球沿 x 軸正向走 1 個單位，取出白球則沿 y 軸正向走 1 各單位，則每一種取法恰好對應一種走法。若取球前的位置在原點，根據規則可得(1) $x-y\le 5$，(2) $x+y\le 10$，另外，因紅球及白球數均大於等於 0，因此 $x\ge 0$，$y\ge 0$；，在此條件下可數得所有的走法共有 1 + 10 + 45 + 120 + 210 + 251 + 200 + 75 + 20 + 5 + 1 = 938 種，即球的取法有 938 種。

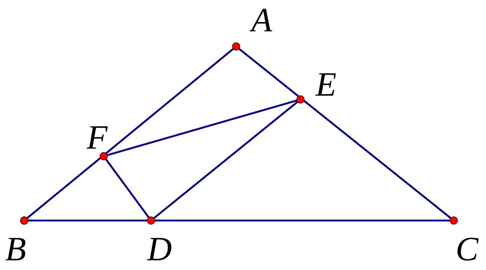


解題評註：

第二小題中，同學容易算錯的地方在於：因「取得紅球得 1 分，白球扣 1 分」，所以在停止取球前，可能出現紅球數大於 5 的狀況，但是因「得分達 5 分」即停止，故過程中不可出現得分超過 5 分的情形。同學容易從結束時的總分及過程中出現的紅球和白球的總數做分類，而忽略了過程中不可出現得分超過 5 分的條件。

問題編號 7503

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$，$D$、$E$、$F$ 三點分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 三邊上，$\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，又 $\triangle BDF$ 之面積為 9，$\triangle AFE$ 之面積為 15，$\triangle DCE$ 之面積為 32，求 $\triangle DEF$ 之面積。



參考解答：

【方法 1】

$\because$ $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，$\therefore \triangle AFE$、$\triangle BDF$、$\triangle DEF$ 為等高三角形，故此三個三角形面積之連比即為三底邊 $\overline{AF}$、$\overline{BF}$、$\overline{DE}$ 之連比。又，

$\because$ $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，

$\therefore$ $\triangle DCE$ 與 $\triangle BCA$ 為相似三角形，故這兩個三角形面積之比即為其二對應邊 $\overline{DE}$、$\overline{BA}$ 邊長平方之比。

因此，設 $\triangle DEF$ 之面積為 x，則

$$x:15:9=\overline{DE}:\overline{AF}:\overline{BF}$$

$$\Rightarrow x:(15+9)=\overline{DE}:(\overline{AF}+\overline{BF})$$

$$=\overline{DE}:\overline{AB}，$$

$$32:(32+15+x+9)=\overline{DE}^2:\overline{BA}^2；$$

得 $x^2:24^2=32:(56+x)$

$$\Rightarrow x^2(56+x)=32\times 24^2$$

$$\Rightarrow x^3+56x^2-18432=0，$$

因 $x>0$，解此方程式，得 $x=16$，故 $\triangle DEF$ 之面積為 16。

【方法二】

設 $\triangle DEF$ 之面積為 x，如同方法一，已得 $\overline{DE}:\overline{AB}=x:24$，要尋找一個等式，可以進一步由此再次切入。

$\because$ $\triangle DCE$ 與 $\triangle BCA$ 為相似三角形，

$\therefore$ $\overline{DE}:\overline{BA}=\overline{DC}:\overline{BC}$，而 $\overline{DC}$ 與 $\overline{BC}$ 分別是 $\triangle DCA$ 與 $\triangle BCA$ 二等高三角形之底邊，故二者面積比，即 $\overline{DC}$ 與 $\overline{BC}$ 邊長比，考慮至此，我們當然會試著連結 $\overline{AD}$ 如右上再觀察。

$\because$ $\overline{DE}\,//\,\overline{AF}$，

$\therefore$ $\triangle DEA$ 與 $\triangle DEF$ 等高同底面積相等，

故 $\triangle DEA$ 之面積亦為 $x \Rightarrow \triangle DCA$ 之面積

爲 $32+x$，又△BCA 之面積爲 $56+x$，

故 $\overline{DC}:\overline{BC}=(32+x):(56+x)$，

綜合 $\overline{DE}:\overline{AB}=x:24$ 與

$\overline{DE}:\overline{BA}=\overline{DC}:\overline{BC}$，

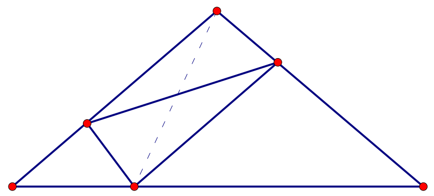
得 $x:24=(32+x):(56+x)$，

即 $x(56+x)=24(32+x)$

$\Rightarrow x^2+32x-768=0$，

因 $x>0$，解此方程式，

得 $x=16$，故△DEF 之面積爲 16。



【方法三】

設 $\overline{DE}:\overline{BA}=1:r$，則

∵ $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，

∴ $\overline{AE}:\overline{EC}=1:r$，

參看(方法二)之圖，易知△AFD 與△AFE 等面積

$\Rightarrow$△ABD 之面積爲 24

$\Rightarrow$△ADC 之面積爲 $24r$。

又，△DCE 之面積 32

$\Rightarrow$△ADC 之面積爲 $32\cdot\frac{1+r}{r}$

$\Rightarrow 24r=32\cdot\frac{1+r}{r}$，

解方程式 $3r^2=4+4r$，$r=2$

$\Rightarrow$△ADE 之面積爲 16，

∵ △DEF 與△ADE 同底等高，二者面積相等

∴ △DEF 之面積爲亦爲 16。

解題評註：

【方法一】解法所用到的觀念都很簡易，也不必畫輔助線，應該不難設想，只不過由於它最後得到了一個 3 次方程式，而 3 次方程式的求解並不容易，因此有必要另外尋找可能途徑。【方法二】主要是避免 3 次方程式的出現，故不用相似三角形面積的比等於相應邊長的平方比之性質，必須再另外尋找等高或同底的三角形，使面積比維持一次形式，以利後續的解方程式問題。相較於【方法二】,【方法三】由假設邊長比出發，容易設想，運算的數字也較小，有其優勢。

實際上，如此之△ABC 中，滿足△BDF、△AFE、△DCE、△DEF 之面積分別是 9、15、32、16 的三角形並非唯一，且形狀未定，甚至也不必是等腰三角形，此由(方法一、二、三)在求解過程中都未用到條件 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 可知。如果將此條件也用以解題，則一樣設△DEF 之面積爲 x，本題之解答也可另外處理如下：

由 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 與 $\overline{DE}\,//\,\overline{AB}$，

可知 $\overline{DE}=\overline{CE}$，參看【方法二】之圖形，

易知△DCE 與△DCA 面積之比，等於 $\overline{AC}$ 與 $\overline{CE}$ 之比，等於 $\overline{DE}:\overline{AB}=x:24$，

故 $32:(32+x)=x:24$，

即 $x^2+32x-768=0$，

得 △DEF 之面積 $x=16$。

本題是簡易的幾何題，沒有也不必特殊的技巧，希望激發同學多動動腦，愉快地徜徉於數學世界。

問題編號
7504

知正整數 $x_1, x_2, ..., x_{10}$ 滿足 $x_1 < x_2 < ... < x_{10}$，且 $x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + ... + x_{10}^{\ 2} \le 2009$，則 $x_7 - x_5$ 的最大值為多少？

參考解答：

取　$x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots,\ x_6 = 6$，則

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 6^2 + x_7^{\ 2} + (x_7 + 1)^2$$
$$+ (x_7 + 2)^2 + (x_7 + 3)^2 \le 2009$$
$$\Rightarrow 4x_7^{\ 2} + 12x_7 + 105 \le 2009$$
$$\Rightarrow x_7^{\ 2} + 3x_7 - 476 \le 0$$
$$\Rightarrow (x_7 + \frac{3}{2})^2 \le 478\frac{1}{4} \qquad \Rightarrow x_7 + 1.5 < 21.9$$
$$\Rightarrow x_7 < 20.4 \qquad \Rightarrow x_7 \le 20$$

故 x_7 的最大值為 20，所以 $x_7 - x_5$ 的最大值為 $20 - 5 = 15$。

解題評註：

本題重點在 $x_7 - x_5$ 的最大值發生時，須使 x_7 盡量的大，x_5 盡量的小，故取 $x_1 = 1$，$x_2 = 2$，…，$x_6 = 6$，且 $x_8 = x_7 + 1$，$x_9 = x_7 + 2$，$x_{10} = x_7 + 3$，代入原式求 x_7 的最大值。

問題編號
7505

建中高一有 1220 名學生，學號依次為 1, 2, 3,…, 1220，從中選出若干名參加國慶升旗典禮，但沒參加的學生中沒有一個人的學號等於另外兩人的學號相乘，那麼被選去參加國慶升旗典禮的至少有多少人？

參考解答：

1. 由於 $35^2 = 1225 > 1220$，若沒參加的學生中有兩人的學號都大於或等於 35，則其乘積必大於 1220，故其乘積不可能為另外第三人的學號。

   若沒參加的學生中有學號 1 號的同學，則他的學號與任何一位同學的乘積也不可能為另外第三人的學號。

   因此現取學號 2, 3, 4, …,34 的同學參加國慶升旗典禮，則剩下沒參加的學生學號為 1, 35, 36, 37,…,1220 滿足要求。
2. 又由鴿籠原理取 $\{\ 2, 67, 2\times 67\ \}$，$\{\ 3, 66, 3\times 66\ \}$，$\{\ 4, 65, 4\times 65\ \}$，…，$\{34, 35, 34\times 35\}$ 共 33 個鴿籠，取法為 $\{\ k, 69-k, k\times(69-k)\ |\ k = 2,3,4\ldots,34\}$，因為 $y = x(69-x) = -(x-34.5)^2 + 1190.25$，故 2×67, 3×66,…, 34×35 皆介在 1~1220 之間，因此學號 2, 3, 4, …,34 的同學中任何一人若沒參加國慶升旗典禮，皆會使剩下沒參加的同學不滿足要求，故被選去參加國慶升旗典禮的至少有 33 人。

解題評註：

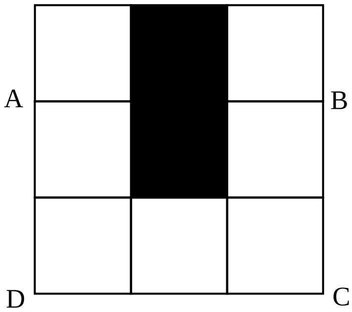
本題重點在直接構造出參加升旗的同學學號為 2, 3, 4, …,34 是滿足題意的解，再利用鴿籠原理的討論得到這幾位同學中若有人不參加升旗，會造成剩下沒參加的同學不滿足要求。

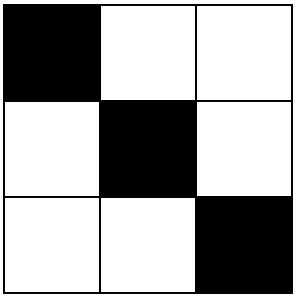
問題編號

7506

在一張11×11方格紙上的每一格中都塗上白色或黑色，使得每一個2×3的小方格矩形中恰好有兩個塗上黑色，求11×11方格紙上共有幾格塗上黑色。

參考解答：

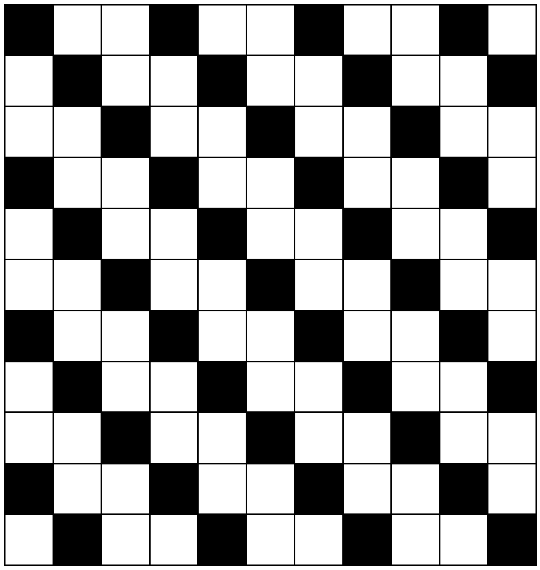


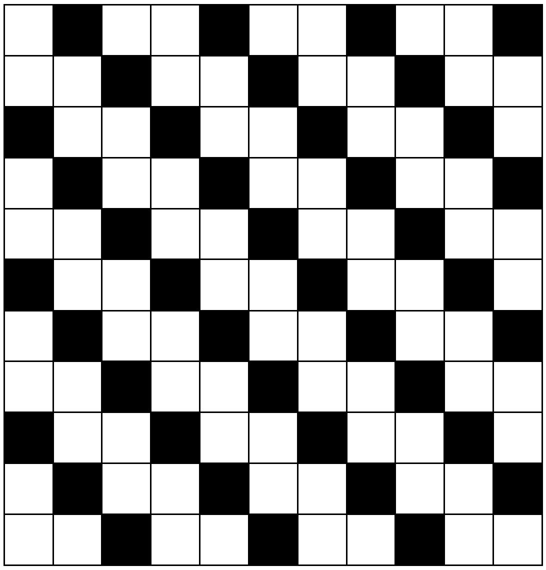


如圖，若在任一3×3的小方格矩形中心塗上黑色，則其上下左右就不能再塗上黑色，例如於其上方塗上黑色，則 $ABCD$ 小方格矩形中只有一個黑色，不符合條件。

若在右下角塗上黑色，則左下角及右上角不能塗上黑色，而左上角一定要塗上黑色，故任一3×3的小方格矩形必放成如右上圖。

得11×11方格紙的塗法如下左圖或右圖：





故共有 41 格或 40 格塗上黑色。