中學生通訊解題第七十四期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
7401

解方程式 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$

參考解答：

令 $\sqrt{x}=a,\sqrt{y-1}=b,\sqrt{z-2}=c$

且 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=M(M>0)$

則 $a+b+c=M$

$a^2+b^2+c^2=x+y+z-3=2M-3$

設 $S^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-(\frac{a+b+c}{3})^2$

$=\frac{2M-3}{3}-(\frac{M}{3})^2$

$=-\frac{M^2}{9}+\frac{2}{3}M-1=-(\frac{M}{3}-1)^2\leq 0$

但 $S^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{3}-(\frac{a+b+c}{3})^2$

$=\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{9}\geq 0$

$\therefore\ S^2=0\Rightarrow S=0$，即 M＝3

$\Rightarrow a=b=c=1$

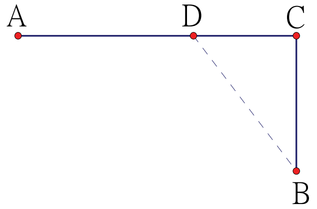
$\Rightarrow x=1,y=2,z=3$

解題評註：

把本題做適當的變數變換，就可得到簡單的關係式，再由乘法公式進而求出解。中和國中梁同學有別於其他同學的解法，他是利用柯西不等式求出解來，非常值得鼓勵。

問題編號
7402

沿河城市 A 運貨到另一地點 B，B 到河岸的最短距離 $\overline{BC}=5$ 公里，$\overline{AC}=7$ 公里，公路運費是水路運費的 n 倍（n 是大於 1 的實數），欲從 B 點修一條公路到河岸點 D 處，使由 A 經水路至 D 處，再由 D 處經公路至 B 點的總運費最小，則 $\overline{DC}$ 是多少公里？



參考解答：

【方法一】

設每公里水路運費為 t 元，$\overline{DC}=x$，則由 A 到 B 的總運費為

$$(7-x)t+nt\sqrt{x^2+25}$$

$$=(-x+n\sqrt{x^2+25})t+7t$$

令 $k=-x+n\sqrt{x^2+25}>0$

則 $(k+x)^2=n^2(x^2+25)$

即 $(n^2-1)x^2-2kx+25n^2-k^2=0$

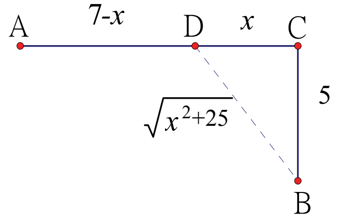
$\because$ x∈R

$\therefore 4k^2-4(n^2-1)(25n^2-k^2)\geq 0$

解得 $k\geq 5\sqrt{n^2-1}$

"="成立 $\Leftrightarrow x=\dfrac{k}{n^2-1}=\dfrac{5}{\sqrt{n^2-1}}$

$\Leftrightarrow \overline{DC}=\dfrac{5}{\sqrt{n^2-1}}$ 時，運費最小



【方法二：利用高中數學微分的方法】

設每公里水路運費為 t 元，$\overline{DC}=x$，則由 A 到 B 的總運費為

$$(7-x)t+nt\ \sqrt{x^2+25}$$

$$=(-x+n\sqrt{x^2+25})t+7t$$

令 $f(x)=-x+n\sqrt{x^2+25}$

則

$$f'(x)=-1+\frac{nx}{\sqrt{x^2+25}}$$

$$=\frac{(n^2-1)x^2-25}{\sqrt{x^2+25}(nx+\sqrt{x^2+25})}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{5}{\sqrt{n^2-1}}$，$x>0$

x	0	$\dfrac{5}{\sqrt{n^2-1}}$	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$\therefore x=\dfrac{5}{\sqrt{n^2-1}}\Leftrightarrow \overline{DC}=\dfrac{5}{\sqrt{n^2-1}}$ 時，

運費最小

【方法三：台北縣中和國中梁同學的作法】

1. 設 $\overline{DC}=x\ (km)$，$\overline{AD}=7-x$，

   $\overline{BD}=\sqrt{x^2+25}$

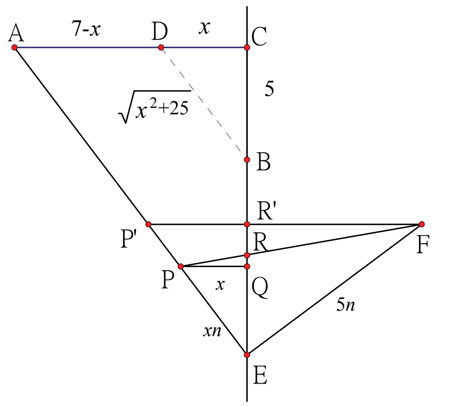
   每公里水路運費為 k 元，

   則由 A 到 B 的總運費為

   $ky=(7-x)k+nk\sqrt{x^2+25}$

2. 由題意求當 $n\sqrt{x^2+25}-x$ 極小時 x 的值。

   作圖分析



(1) 作 $\overleftrightarrow{BC}$。

(2) $\overleftrightarrow{BC}$ 上取點 E，使得 $\overline{AE}=7n$

(3) 過 E 點，作 $\overline{EF}\perp\overline{AE}$，且 $\overline{EF}=5n$

(4) 在 $\overline{AE}$ 上取一動點 P，設 $\overline{PE}=xn$，過 P 點作 $\overline{PQ}\perp\overleftrightarrow{BC}$ 於 Q 點，連 $\overline{PF}$ 交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 R 點

①∵ $\triangle ACE\sim\triangle PQE$

$\therefore\ \dfrac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{PE}}{\overline{PQ}}\ \Rightarrow\overline{PQ}=x$，

② $\overline{PF}=n\sqrt{x^2+25}$

③ $\overline{PR}\geq\overline{PQ}$ (Q、R 重合時等號成立)

④ $\overline{PF}-\overline{PQ}\geq\overline{PF}-\overline{PR}$

$\Rightarrow n\sqrt{x^2+25}-x\geq\overline{FR}$

3. 過 F 作 $\overleftrightarrow{BC}$ 之垂直線，交 $\overleftrightarrow{BC}$ 於 R'，交 $\overline{AE}$ 於 P'

$\because\ \overline{P'F}\perp\overleftrightarrow{BC}$

$\therefore\ \overline{FR'}$ 為 F 點至 $\overleftrightarrow{BC}$ 的(最短)距離。

⇒當動點 P 於 P' 時，$\overline{FR}$ 有最小值 $\overline{FR'}$

$n\sqrt{x^2+25}-x\geq\overline{FR}\geq\overline{FR'}$

$n\sqrt{x^2+25}-x$ 的最小值為 $\overline{FR'}$

4. $\because\ \triangle P'R'E\sim\triangle P'EF$

$\therefore\ \dfrac{\overline{P'E}}{\overline{P'R'}}=\dfrac{\overline{P'F}}{\overline{P'E}}$

$\Rightarrow\dfrac{xn}{x}=\dfrac{n\sqrt{x^2+25}}{xn}$

$\Rightarrow x=\dfrac{5}{\sqrt{n^2-1}}$，運費最小

解題評註：

1. 數學上常利用高中微分的方法來處理極大值、極小值的問題，如方法二；而此題卻可以利用「實係數一元二次方程式有實根⇔判別式≥0」的性質來解決，如方法一；台北縣中和國中梁子慶同學的作法，利用構造法得到總運費最小時的條件。
2. 國中的基礎數學也可以解決微分的問題，也是很有力的方法。同學從這一題的這些方法都可以學習到重要的數學理論與性質。

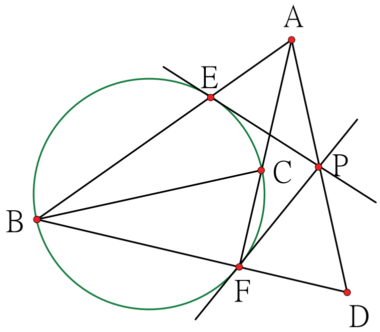
問題編號
7403

如圖，以△ABC 的一邊 $\overline{BC}$ 為直徑作圓，分別交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 所在的直線於點 E、F，

過點 E、F 分別作圓的切線交於一點 P，

直線 $\overleftrightarrow{AP}$ 與 $\overleftrightarrow{BF}$ 交於一點 D，

證明：D、C、E 三點共線。



參考解答：

【方法 1】

作 $\overline{EF}$ 、 $\overline{EC}$ 、 $\overline{CD}$ ，則

$\angle PEF = \angle PFE = \angle EBF$

$\because \overline{AF} \perp \overline{BF}$ ，

$\therefore \angle BAF = 90^0 - \angle EBF = 90^0 - \angle PEF = \dfrac{1}{2}\angle EPF$

以 P 爲圓心，$\overline{PE}$ 爲半徑作圓，交直線 $\overleftrightarrow{BA}$ 於點 A'，

則 $\angle EA'F = \dfrac{1}{2}\angle EPF = \angle BAF$

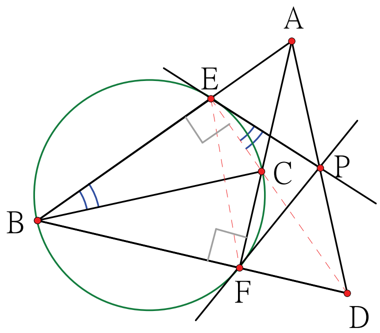
故 A 、 A' 共點，

$\therefore \overline{PA} = \overline{PE}$

且 $\angle PAE + \angle ABC = \angle PEA + \angle PEC = 90^0$

得 $\overline{BC} \perp \overline{AP}$ ，因此 C 是 $\triangle ABD$ 的垂心，

又 $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ ，則 D、C、E 三點共線。



【方法二：台北縣中和國中梁同學的作法】

解析幾何的方法

1. 不妨設 $B(-1,0)$，$C(1,0)$，

   $\Rightarrow \overline{BC}$ 在 x 軸上， $\overline{BC}$ 爲直徑的圓爲 $x^2+y^2=1$，圓心爲 $O(0,0)$，

   設 $E(a,b)$，$F(c,d)$，E、F 在圓 O 上

   $\therefore a^2+b^2=1$，$c^2+d^2=1$

   $\Rightarrow b^2=1-a^2$，$d^2=1-c^2$……(*)

2. 兩切線

   $\overleftrightarrow{EP}$ ： $ax+by=1$

   $\overleftrightarrow{FP}$ ： $cx+dy=1$

3. 解 $\begin{cases} \overleftrightarrow{BE}: y=\dfrac{b}{a+1}(x+1) \\ \overleftrightarrow{CF}: y=\dfrac{d}{c-1}(x-1) \end{cases}$ ，又由(*)式

   得其交點 A 的 x 坐標， $x=\dfrac{1+ac-bd}{a+c}$

4. 解 $\begin{cases} \overleftrightarrow{EP}: ax+by=1 \\ \overleftrightarrow{FP}: cx+dy=1 \end{cases}$ ，，又由(*)式

   得點其交 P 的 x 坐標， $x=\dfrac{1+ac-bd}{a+c}$

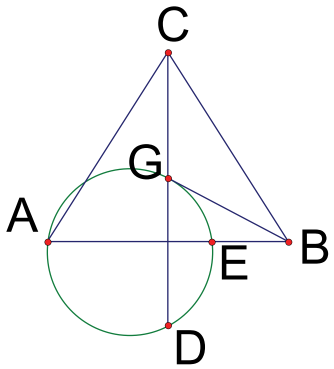
5. 由 3.和 4.得知 A、P 兩點皆在鉛直線 $x=\dfrac{1+ac-bd}{a+c}$ 上，又 $\overline{BC}$ 在 x 軸上，因此 $\overleftrightarrow{AP}\perp\overleftrightarrow{BC}$
6. $\because$ $\overline{BC}$ 爲直徑
   $\therefore$ $\overline{AF}\perp\overline{BD}$，$\overline{CE}\perp\overline{AB}$
   $\because$ $\overleftrightarrow{AP}\perp\overleftrightarrow{BC}$，$\overline{AF}\perp\overline{BD}$，
   $\overline{AF}$、$\overleftrightarrow{BC}$ 交於 C 點
   $\therefore C$ 點爲$\triangle ABD$ 的垂心。
   又 $\overline{CE}\perp\overline{AB}$，則 D、C、E 三點共線。

解題評註：

1. 【方法一】利用作輔助線、弦切角等於圓周角和三高交於一點(垂心)的幾何性質來得到證明。
2. 【方法二】利用解析幾何的方法，利用代數，求出切線方程式，兩線交點，三高交於一點(垂心)的性質來得證。
3. 解析幾何是一個有力的數學方法，同學的代數能力也很強，常用這個方法來解題。建議同學也要多學習利用幾何性質的方法來解題，以使自己的數學能力更上層樓。

問題編號
7404

已知 G 爲 ΔABC 的重心，$\overline{CA}=\overline{CB}$，有一圓通過 G、A 兩點且與 $\overline{GB}$ 相切，$\overline{AB}$ 與此圓交於 E 點，$\overline{CG}$ 的延長線交此圓於 D 點。若 $\overline{BE}=\sqrt{3}$、$\overline{GD}=3$，試求 $\overline{GB}=?$



參考解答：

(1) 在 $\overline{AG}$ 的延長線上取一點 F，使 $\overline{AG}=\overline{GF}$ 在 $\overline{CG}$ 的延長線上取一點 H，使 $\overline{CG}=\overline{GH}$ 連接 $\overline{AD}$、$\overline{CF}$、$\overline{AH}$、$\overline{HB}$
(2) 因爲 G 爲 ΔABC 的重心，所以 $CFBG$ 與 $AGBH$ 爲平行四邊形
(3) $\angle DCF=\angle DGB$（因爲 $\overline{CF}\,//\,\overline{GB}$）$=\angle DAF$（因爲 $\overline{GB}$ 與圓相切於 G 點）因此 A、D、C、F 四點共圓，所以根據圓的內冪性質可得：
$\overline{GD}\times\overline{GC}=\overline{AG}\times\overline{GF}$
$\Rightarrow \overline{GC}=\dfrac{\overline{AG}\times\overline{GF}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{GB}^2}{\overline{GD}}$（因爲 $\overline{CA}=\overline{CB}$ 且 G 爲 ΔABC 的重心，所以 $\overline{AG}=\overline{GB}$）
(4) 因爲 $\overline{GB}$ 與圓相切於 G 點，所以根據圓的外冪性質可得：
$\overline{AB}\times\overline{BE}=\overline{GB}^2 \Rightarrow \overline{AB}=\dfrac{\overline{GB}^2}{\overline{BE}}$
(5) 因爲 $AGBH$ 爲平行四邊形，所以

$$\overline{AB}^2+\overline{GH}^2=2(\overline{AG}^2+\overline{GB}^2)=4\overline{GB}^2$$

$\Rightarrow \overline{AB}^2+\overline{GC}^2=4\overline{GB}^2$ （因為 $\overline{GH}=\overline{GC}$ 且 $\overline{AG}=\overline{GB}$ ）

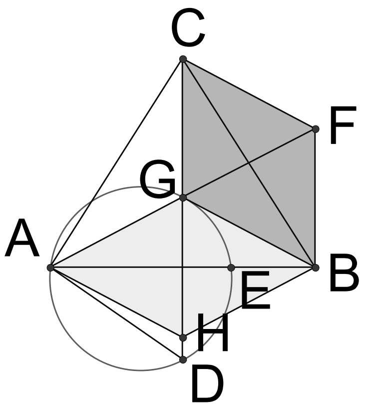
(6) 將 (3) 、 (4) 代 入 (5) ：

$$\left(\frac{\overline{GB}^2}{\overline{BE}}\right)^2+\left(\frac{\overline{GB}^2}{\overline{GD}}\right)^2=4\overline{GB}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{GB}}{\overline{BE}^2}+\frac{\overline{GB}}{\overline{GD}^2}=4$$

$$\Rightarrow \overline{GB}^2=\frac{4}{\frac{1}{\overline{BE}^2}+\frac{1}{\overline{GD}^2}}=\frac{4}{\frac{1}{(\sqrt{3})^2}+\frac{1}{3^2}}=9$$

$$\Rightarrow \overline{GB}=3$$



解題評註：

本題關鍵在於一些常見的幾何性質，例如圓內接四邊形、圓的內冪與外冪定理。另外對於輔助線的作法並不唯一，是很好的幾何訓練題。

問題編號
7405

已知數列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$,前 n 項的和 $S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$, 試求 S_{2009} 的值?

參考解答：

因為 $S_n=\frac{1}{2}(S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}})$

所以 $S_n(S_n-S_{n-1})=\frac{1}{2}((S_n-S_{n-1})^2+1)$

即 $2S_n(S_n-S_{n-1})-\frac{1}{2}((S_n-S_{n-1})^2=1$

解上述二次方程式可得 $1=S_n^2-S_{n-1}^2$

於是 $1=S_n^2-S_{n-1}^2$

$1=S_n^2-S_{n-1}^2$

$1=S_{n-1}^2-S_{n-2}^2$

$\vdots$

$1=S_2^2-S_1^2$

將上述各式相加得 $n-1=S_n^2-S_1^2$

故 $S_n=\sqrt{n}, S_{2009}=\sqrt{2009}$ 。

解題評註：

本題屬於較難的數論問題，如果能夠巧妙運用數列級數的特性，可以適度簡化計算過程。