視覺化表徵的解題策略--以部分-整體對照活動為例

劉祥通 [1]* 黃國勳 [2] 蘇逸潔 [1]

[1] 國立嘉義大學 數學教育研究所

[2] 國立高雄師範大學 教育學研究所

解題教學是數學教學很重要的一環，在引導學生解題的歷程中，利用表徵幫助學生理解一直備受關注。本文以「部分－整體」的對照活動爲例，說明恰當的視覺化表徵教學能幫助學生理解，也可避免公式化的解題算則帶給學生記誦的負擔，進而讓學生認識使用視覺化表徵的優勢，以幫助解題。

壹、緒論

美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）在「學校數學的原則與標準」（Principles and Standards for School Mathematics）中提到，使用表徵來模式化及詮釋物理、社會、或數學現象時，可以更加增進學生對學習內容的理解。表徵可以幫助學生呈現解題方法、論點、及理解的情形，它有助於與別人溝通想法，或自我了解，並且也能幫助學生重組相關概念之間的關係連結，並應用數學解決真實世界的問題（NCTM, 2000）。在師生的互動過程中，教學者運用表徵來幫助學生理解數學概念，學生透過表徵來傳達其所內化的數學概念，當然教學者也可以從學生的表徵來檢視其數學理解的情形 (English & Halford , 1995)。從問題解決的層面來看，形成表徵(form a representation)是解題的初始階段，在表徵過程中可形成解題的線索（岳修平譯，1998）。尤其外在表徵更是解題的重要輔助；如果解題者對問題所形成的表徵不正確，將會影響他找到正確解題的路徑與方法，故問題表徵對解題成敗有關鍵性的影響（林香、張英傑，2004）。

Behr, Lesh, Post 與 Silver（1983）提出與數學學習有關的五種表徵，分別爲實物、教具模型、圖形、語言與符號，其中前三個表徵較爲具體，後二個表徵較爲抽象。其中，圖像表徵不但能幫助學生記憶知識，還能強化他們對內容的理解。當教師協助學生以圖像表徵方式建立新知識時，學生能深入思考並記住相關知識，學習成就會提高（Marzano, Pickering, & Pollock, 2001）。此所謂的圖像表徵其實是一種視覺化表徵的方法，當個體面臨解決數學問題時，會在腦海中或在紙上呈現與問題有關的圖像，以幫助個體進行解題思

*爲本文通訊作者

考（林香、張英傑，2004）。Van Hiele 也強調在教學過程中，利用視覺化的表徵方法有降低思考層次之效。例如，以 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ 爲例，利用細格版（2×3）的視覺化表徵，比運用等值分數（$\frac{1}{2}=\frac{3}{6};\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$）的理論要簡單許多（引自 吳毓瑩、呂金燮與吳昭容，2009）。

從教學實際的現象而言，傳統的教學往往要學生熟記公式，忽視公式的理解是否超過學生的認知，未能善用視覺化的方法幫助學生理解。例如，走了 $\frac{3}{4}$ 的路程是 $\frac{3}{5}$ 公里，請問全程是多少公里? 傳統的解法是 $\frac{3}{5}\div\frac{3}{4}=\frac{4}{5}$，但是爲何要除以 $\frac{3}{4}$，很多學生是不了解的。如果我們提供學生視覺化的表徵，也許可以幫助學生理解全程的 $\frac{1}{4}$ 是 $\frac{1}{5}$ 公里，因此全程是 $\frac{4}{5}$ 公里（王志銘、劉祥通，2007）。筆者認爲能否看出全程的 $\frac{1}{4}$ 有多長，可能就是能否成功解題的關鍵。再者，如果能將此段長與全程長之間的關係用圖形標示清楚，就能發揮視覺化表徵的功能，老師就可以藉此幫助其他學生學習。

根據許多國內外研究與筆者實務的經驗，分數概念的學習帶給學童很大的困擾。依照前述視覺化表徵對於學生解題的助益，本文列舉四個有關分數的「部分與整體」的實例，並運用視覺化表徵的策略進行解題，以提供教育伙伴參考。

貳、實例分析與說明

實例一：

有一件工程，甲需工作 3 天完成，乙需 5 天完成，二人合作需幾天完成？

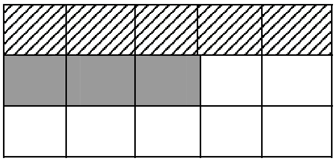
傳統解法：

先將全部工程假設爲 1，然後列式計算：$1\div3=\frac{1}{3}$（甲一天完成工程的 $\frac{1}{3}$），$1\div5=\frac{1}{5}$（乙一天完成工程的 $\frac{1}{5}$），兩人一天共完成 $\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{8}{15}$，$1\div\frac{8}{15}=\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$，精簡列式的算法則是：$1\div(\frac{1}{3}+\frac{1}{5})=1\frac{7}{8}$。以上的列式解題過程，透過老師的解說，也許有助於部分學生理解算式的意義。至於爲什麼全部工程假設爲 1？爲什麼要作 $1\div\frac{8}{15}$ 的運算？恐怕很多學生，包括中學生或成年人，都是知其然，卻不知其所以然。

筆者曾經詢問一位國一學生上述兩個問題，該生只回答「全部工程當作 1 比較好運算」，筆者請學生改以 3 與 5 的最小公倍數 15 當作全部的工作量，該生卻不得其解，可見該生解此問題只是依樣畫葫

蘆。事實上，將全部工程改設爲 15 更好解題。若是教學者提供了以下的圖形作爲輔助，學生可能容易去對照未完成的工作量與已完成的工作量之間的關係。

視覺化解法（圖一）：



圖一：甲、乙二人一天的工作量與全部工作對照圖（Garner, 2006）

甲一天的工作量以斜線表示，乙一天的工作量以灰色表示，未完成的工作量以空白表示。根據圖一，學生可能較容易發現：如此經過一天後，甲乙兩人可完成 $\frac{8}{15}$，剩下了 $\frac{7}{15}$ 的工作，剩下的工作只要再 $\frac{7}{8}$ 天即可完成，因此共須要 $1\frac{7}{8}$ 天。

此過程是經過兩次對照，第一次是 15 與 8 的對照得到 1，第二次是 7 與 8 的對照得到 $\frac{7}{8}$，藉由此種視覺表徵，學生可能較明瞭 $1\frac{7}{8}$ 天的理由。

實例二：

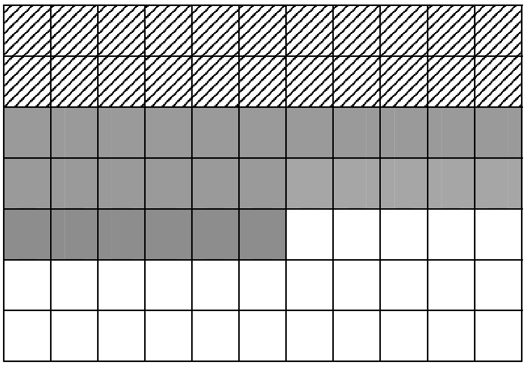
一件工程甲需工作 $3\frac{1}{2}$ 天完成，乙需 $2\frac{3}{4}$ 天完成，二人合作需幾天完成？

傳統解法：

類似實例一的解法 $1\div(\frac{2}{7}+\frac{4}{11}=\frac{50}{77})=1\frac{27}{50}$。

視覺化解法（圖二）：

筆者請學生以用 7 與 11 的最小公倍數 77 當作全部的工作量，然後甲一天的工作量以斜線表示，乙一天的工作量以灰色表示，未完成的工作量以空白表示。根據圖二，學生先求得：甲一天完成工程的 $\frac{2}{7}$，乙完成工程的 $\frac{4}{11}$，二人合作一天可完成 $\frac{2}{7}+\frac{4}{11}=\frac{50}{77}$ 的工作量，然後發現工作 1 天後，完成 $\frac{50}{77}$ 剩下 $\frac{27}{77}$，接著剩下的 $\frac{27}{77}$ 相對於一天的工作量 $\frac{50}{77}$，利用 27÷50 計算，還需要 $\frac{27}{50}$ 天完成，因此共需要 $1\frac{27}{50}$ 天完成。而傳統解法中，如同實例一的情形，運用 $1\div(\frac{2}{7}+\frac{4}{11}=\frac{50}{77})=1\frac{27}{50}$ 的步驟是很難使學生理解箇中涵義。



圖二：甲、乙二人一天的工作量與全部工作對照圖

實例三：

$\frac{5}{8}$桶的水有 35 公升，請問 1 桶有多少公升？

傳統解法：

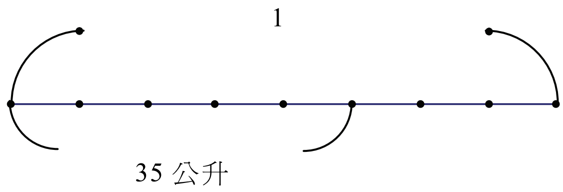
依照題意，可以列$\square \times \frac{5}{8} = 35$ 的式子，利用移項得 $35 \div \frac{5}{8} = 56$。但是如果直接教 $35 \div \frac{5}{8} = 56$ 的算則，對學生來說可能太難，只是記憶算則而已，因爲此算則內含當量除的觀念，對學生來說似乎過於抽象。

比例解法：

$\frac{5}{8} : 1 = 35 : \square$，$\square = 56$ (公升)。依據題意，直接列出比例式，運用裡面相乘等於外面的乘積進行解題。此方法對於學生而言較爲簡易，直接使用公式算則運算即可，但學生是否真正能理解比例式的關係將是一門重要的課題。

視覺化解法（圖三）：

圖形代表的意涵爲$\frac{5}{8}$桶的水有 35 公升，依照圖示輔助詳細說明：$\frac{5}{8}$桶的水有 35 公升，就是將一個水桶分爲 8 等分，其中的 5 等分是 35 公升，那麼 1 等分（$\frac{1}{8}$桶）的水有 7 公升（$35 \div 5 = 7$）。這樣的解題策略是先畫出 1 桶有幾個子單位（subunit），再從子單位的數據，回頭推算一單位的量值。也就是說，透過圖像表徵出題意所給定的條件，繼而求出$\frac{1}{8}$桶有 7 公升的過程，學生可能因此較容易看出整體 1 就是 56 公升。



圖三：$\frac{5}{8}$桶與 1 桶之比（5：8）的水容量對照圖（朱建正，1997，54 頁）

實例四：

在靠近北極地方的某一天，夜長是晝長的 $1\frac{2}{7}$倍，請問夜長是多少小時？晝長又是多少小時？

傳統解法：

$24 \div (1 + 1\frac{2}{7}) = 10.5$ 小時（晝長）

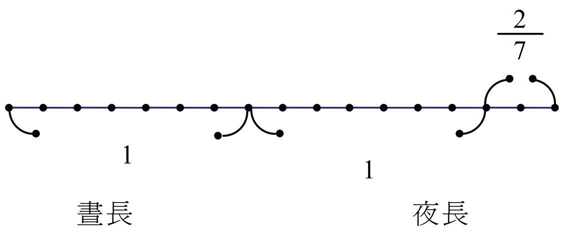
（改成分數表示）

$24 - 10.5 = 13.5$ 小時（夜長）

此解題策略是利用基準化的觀點，把「基準量」視爲 1，把「比較量」視爲基準化後的比值，但站在學生的立場，晝長與夜長之間，該定位何者爲「基準量」、何

者爲「比較量」？常有混淆不清的困擾。若能引導學生使用視覺化表徵來增進題意的了解，進而找到解題的線索與理解算式的意義，則更能協助學生成功解題，建構數學知識。

視覺化解法（圖四）：



圖四：晝長、夜長之比（7：9）的對照圖

24 ÷（7＋9）＝1.5

1.5 × 7＝10.5 小時（晝長）

1.5 × 9＝13.5 小時（夜長）

從圖四中，學生可以發現整體 24 小時可以切割成 24 ÷（7＋9）份，每 1 份是 1.5 小時。

以上四個「部分整體」活動問題，筆者皆提供了視覺化表徵的對照圖。希望能透過視覺化表徵來幫助學生理解題意和解題過程、重組相關概念之間的關係連結。尤其在表徵過程中可形成解題的線索，輔助學生成功解題。此外，在解題過程中，此等視覺化圖形既是輔助學生解題運思的素材，也是幫助溝通的表徵工具（蔣治邦，1997）。例如在實例四中，在同一數線上畫出 2 個 1 與 1 個 $\frac{2}{7}$ 後，解題者又以 $\frac{1}{7}$ 爲子單位，然後看到了此線段上共有 16 小格，並以此 16 小格當作素材，分割一天 24 小時，一旦解出後，又以此線段圖當作表徵的工具，傳達想法給他人了解。

參、結語

不管是透過語言或非語言的表徵方式，教與學的互動就是師生不斷表徵的歷程。然而，表徵並非人類與生俱來的能力，而是學習得來的，且表徵方式也隨著年齡而漸次發展：從動作表徵（enactive representation）到圖像表徵（iconic representation），再到符號表徵（symbolic representation）（張春興，1996）。雖然符號表徵能力實屬高階思維，但人類的思考卻是三種表徵交替使用。也就是說，人類的思考其實是很有彈性的，有時用圖像思考，有時用符號思考，但總是以有利於理解問題和解決問題爲考慮（劉秋木，1996）。

是以，解數學問題當下所顯現的思考也是如此，有時用具體表徵，有時用圖像表徵，有時用符號表徵，端視問題的情境來決定。而在教學的互動過程中，教學者要用何種表徵來幫助學生理解數學概念，除了依據問題的情境以外，同時也要取決於學生的認知程度。前述所呈現的四個分數問題有一定的難度，中學生也未必能掌握運算式子的意義。因此，教師面對以上等抽象的問題時，應協助學生建立心像，以作爲思考的憑藉與溝通的媒介。但根據筆者實際經驗，教師提示以上四個視覺化

表徵時，只有少數學生能自動洞察到圖形的關係，領略視覺化表徵的解題優勢，但大部分的學生仍須依賴教師的解說，方能理解此視覺化表徵的奧妙，進而成功解題。再進一步的，視覺化表徵對學生而言是心智技能運用的過程，需要不斷的練習、回饋與修正，才能更為熟悉與精鍊。因此，教學者平時就要指導學生練習視覺化表徵，和及時提供回饋，以幫助建立視覺化表徵的解題策略，增進學生數學概念的理解。

肆、參考文獻

王志銘、劉祥通（2007）。一位資優生自發性解題表現之探究~以分數除法之當量除為例。**資優教育季刊，105**,45-56。

岳修平譯（1998）。E. D. Gagne, C. W. Yekovich, & F. R. Yekovich 著。**教學心理學**。台北：遠流。

林香、張英傑（2004）。國小資優生運用畫圖策略解題之研究。**台北師院學報，17**（2），1-22。

張春興（1996）。**教育心理學－三化取向的理論與實踐**。台北：東華。

劉秋木 (1996)。**國小數學科教學研究**。台北：五南。

蔣治邦（1997）。由表徵的觀點看格式的選擇。**國民小學數學科新課程概說**，49-65 頁。台北：文芳。

朱建正（1997）。**國小數學課程的數學理論基礎**。行政院國家科學委員會專題研究成果報告（NSC-85-2513-S-002-001）。臺北市：國立臺灣大學數學系。

吳毓瑩、呂金燮與吳昭容（2009）。重讀幾何思維的階層論：載體理論的啓示。**科學教育學刊，17**（2），157-177。

Behr, M. J., Lesh, R., Post, T. R., & Silver, E. A. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh., & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and process* (pp. 91-126). New York: Academic Press, Inc.

English, L.D. , & Halford, G. S. (1995). Mathematics education：Models and processes. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Garner, M. (2006). Old problems with new questions. **National Council of Teachers of Mathematics** News Bulletin, 42(9), p.5.

Van Hiele, P. M.(1986). Structure and insight. New York:Academic Press.

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representation in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* (pp. 33-40). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Marzano, R., Pickering, D., & Pollock, J., (2001). *Classroom instruction that works.* Association for Supervision and Curriculum Development: Alexandria, VA: **Association for Supervision and Curriculum Development**

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.