模擬骰子投擲的一種隨機遊戲

林嘉祥 [1] 陳仁義 [1,2]*

[1] 國立嘉義大學 數學教育研究所

[2] 私立南華大學 資訊管理學系所

壹、緒論

在我們日常生活當中，經常會碰上「不確定性」的問題存在，也常會感受到無常、無奈、甚至迷信的情況，如何建立正確的「科學化」思維，以追尋豐富而自在的美好人生境界，應該是很多人在努力追求的。在本篇文章中，我們運用生活周遭漸增呈現的「機率語言」和統計方法，試圖來呈現不確定性環境中的一種科學化思維和體驗，透過一張亂數表和遵循共同遊戲規則來模擬骰子投擲，大家在此種隨機遊戲過程中，以科學化方法的記錄、觀察、分析、比較和整理之後，做整體性的分享活動，雖然每位參與同學在亂數表中初始值不相同，但依循的順序都是由上至下、由左至右，所得出結果可發現有一定的規律存在，由此可感受到「同中有異」的隨機現象，又能回到「異中求同」的情境。此外，科學方法是經得起考驗可以重做再現(reproduced)， 只要遵循相同的遊戲規則，模擬的分析結果會趨於一致，可以體會的情境和思維感受也是相近的。我們抱持著野人獻曝的精神，將第一位作者的書面報告和討論心得改寫成本篇文章，且增添了同時修課同學們的心得作爲分享活動！題材內容的設計整理則是第二位作者的課程規劃和想法，也盼望著教學目標的可能實現：期使得同學們在學習過程中，逐步地建立「隨機」、「隨緣」和「無常」的正確「科學化」思維。

*本文通訊作者

貳、模擬遊戲描述

一、模擬遊戲之目的

本遊戲之目的乃是藉由「亂數表」的「具體操作」,順著亂數表中的數字變化來模擬投擲骰子的樣子，經過 60、90、120 次的投擲之後整理出各個點數的出現次數，期待藉此模擬遊戲可以看出「異中求同」的情境。雖然在亂數表中的值皆是不同的，但因依循的順序都是由上至下、由左至右，所以得出之結果可發現有一定之規律存在，依此正是所謂的「異中求同」。

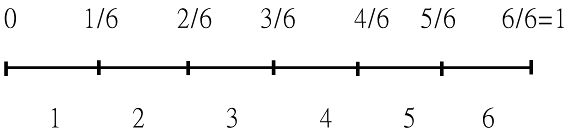
記錄了模擬骰子的數值和統計，我們利用卡方適合度檢定來檢驗骰子的公平性與不公平性，以體驗原始模擬資料與期望情況的符合程度或者落差大小，由卡方值表現出來，以了解卡方檢定的深刻意義。最後我們將模擬的過程與結果，以圖表的呈現、心得的分享、以及書面報告的整理等具體化成果，試圖清楚地呈現出來。

二、遊戲規則

我們使用 R 程式產生一個 300 數值的亂數表(附錄 A)，作爲修課同學們的相同基礎資料，每位同學有個人初始位置做爲起點，在亂數表中依循著由上至下、由左至右之順序得出一百二十個亂數值。根據所規劃的三種情況來模擬公平與不公平的骰子投擲，藉由這些數值來模擬產生骰子投擲所出現的點數，經過適當整理統計以瞭解「隨機性」、「必然性」等觀念。原始資料的模擬情況分成三種情形，敘述如下：

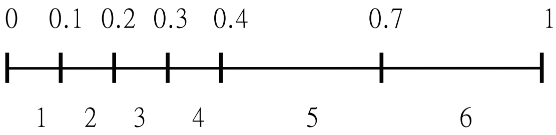
(一) 模擬公平骰子投擲

若是亂數表值介於 0～1/6，將其當作投擲點數 1；亂數表值介於 1/6～2/6，將其當作投擲點數爲 2；亂數表值介於 2/6～3/6，將其當作投擲點數爲 3；亂數表值介於 3/6～4/6，將其當作投擲點數爲 4；亂數表值介於 4/6～5/6，將其當作投擲點數爲 5；亂數表值介於 5/6～6/6(=1)，將其當作投擲點數爲 6。其中每個區間均含右邊的點。如下數線表示：



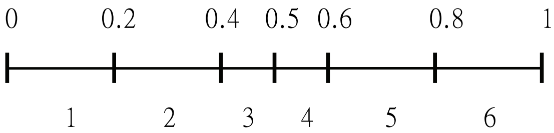
(二) 模擬不公平骰子投擲情況A

若是亂數表值介於 0～1/10，將其當作投擲點數爲 1；亂數表值介於 1/10～2/10，將其當作投擲點數爲 2；亂數表值介於 2/10～3/10，將其當作投擲點數爲 3；亂數表值介於 3/10～4/10，將其當作投擲點數爲 4；亂數表值介於 4/10～7/10，將其當作投擲點數爲 5；亂數表值介於 7/10～10/10(=1)，將其當作投擲點數爲 6。其中每個區間均含右邊的點。如下數線表示：



(三) 模擬不公平骰子投擲情況B

若是亂數表值介於 0～2/10，將其當作投擲點數爲 1；亂數表值介於 2/10～4/10，將其當作投擲點數爲 2；亂數表值介於 4/10～5/10，將其當作投擲點數爲 3；亂數表值介於 5/10～6/10，將其當作投擲點數爲 4；亂數表值介於 6/10～8/10，將其當作投擲點數爲 5；亂數表值介於 8/10～10/10(=1)，將其當作投擲點數爲 6。其中每個區間均含右邊的點。如下數線表示：



參、模擬結果與整理分析

模擬結果除了可用人工處理且判斷完成之外，亦可使用 EXCEL 程式碼(參閱附錄 B)來加速完成模擬工作。部份的模擬結果呈現在附錄 **C**(**模擬公平骰子**)、附錄 **D** (**模擬不公平骰子情況 A**)、附錄 **E** (**模擬不公平骰子情況 B**)。我們分別整理模擬投擲骰子 60 次、90 次、120 次的次數分配表，藉以觀察資料量多與量少的變化或趨勢，另一方面則分別討論公平骰子與不公平骰

子之原始模擬資料的卡方值，在不同假設條件之下的卡方值變化與分佈，期能清楚看見次數由少變多之間的檢定力變化，以及卡方分配的合適性檢定成效。

一、模擬公平骰子投擲遊戲結果

(一)『公平』假設之下 投擲骰子 60 次、90 次、120 次點數次數分配表(參考附錄 C)

投擲次數	丟擲60次			丟擲 90 次			丟擲 120 次		
點數	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k
1	9	**10**	－1	12	**15**	－3	17	**20**	－3
2	14	**10**	4	20	**15**	5	22	**20**	2
3	11	**10**	1	16	**15**	1	21	**20**	1
4	8	**10**	－2	14	**15**	－1	17	**20**	－3
5	10	**10**	0	15	**15**	0	26	**20**	6
6	8	**10**	－2	13	**15**	－2	17	**20**	－3
總和	60	60	0	90	90	0	120	120	0

(二)分析

1. 投擲 60 次公平的骰子卡方檢定：

六個類別之自由度 df＝6－1＝5,在顯著水準 0.05 下之臨界點爲 11.07。

因此，檢定假設爲公正的骰子時：

H_0： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

H_1： $P_i \neq 1/6$, 有個 $i = 1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \frac{(9-10)^2}{10} + \frac{(14-10)^2}{10} + \frac{(11-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} + \frac{(10-10)^2}{10} + \frac{(8-10)^2}{10} = 2.6$$

由於 $\chi^2 = 2.6 < X_5^2 = 11.07$，表示此觀察資料無法拒絕 H_0假設，因此可接受此顆骰子是公正的。

2. 投擲 90 次公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲公正的骰子時

H₀： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

H₁： $P_i \neq 1/6$, 有個 $i = 1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \frac{(12-15)^2}{15} + \frac{(20-15)^2}{15} + \frac{(16-15)^2}{15} + \frac{(14-15)^2}{15} + \frac{(15-15)^2}{15} + \frac{(13-15)^2}{15} = 2.67$$

由於 $\chi^2 = 2.67 < X_5^2 = 11.07$，表示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H_0 假設，因此可接受骰子是公正的。

3. 投擲 120 次公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲公正的骰子時

H₀： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

H₁： $P_i \neq 1/6$, 有個 $i = 1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(21-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} + \frac{(26-20)^2}{20} + \frac{(17-20)^2}{20} = 3.4$$

六個類別對應之自由度 df＝6－1＝5。由於 $\chi^2 = 3.4 < X_5^2 = 11.07$，顯示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H_0 假設，因此可接受骰子是公正的。

二、模擬不公平骰子投擲情況 A

(一)『公平』假設之下 骰子投擲 60 次、90 次、120 次各點數次數分配表（參考附錄D）

投擲次數	丟擲60次			丟擲 90 次			丟擲 120 次		
點數	O_k次數	E_k次數	$O_k - E_k$	O_k次數	E_k次數	$O_k - E_k$	O_k次數	E_k次數	$O_k - E_k$
1	6	**10**	－4	8	**15**	－7	12	**20**	－8
2	5	**10**	－5	7	**15**	－8	8	**20**	－12
3	9	**10**	－1	12	**15**	－3	13	**20**	－7
4	9	**10**	－1	12	**15**	－3	14	**20**	－6
5	16	**10**	6	26	**15**	11	36	**20**	16
6	15	**10**	5	25	**15**	10	37	**20**	17
總和	60	60	0	90	90	0	120	120	0

(二)分析

1. 投擲 60 次公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲公正的骰子時

H$_0$： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

H$_1$： $P_i \neq 1/6$, 有個 $i = 1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 10.4$$

由於 $\chi^2 = 10.4 < X_5^2 = 11.07$，表示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H$_0$ 假設，也就是在偏離較小情況下可接受骰子是公正的。

2. 投擲 90 次公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲公正的骰子時

H$_0$： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

H$_1$： $P_i \neq 1/6$, 有個 $i = 1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 23.47$$

由於 $\chi^2 = 23.47 > X_5^2 = 11.07$，表示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料拒絕 H$_0$，也就是不能接受骰子是公正的。

3. 投擲 120 次公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲公正的骰子時

H$_0$： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

H$_1$： $P_i \neq 1/6$, 有個 $i = 1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = 41.9$$

由於 $\chi^2 = 41.9 > X_5^2 = 11.07$，顯示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料拒絕 H$_0$ 假設，也就是不能接受骰子是公正的。

由此三種骰子模擬情況可知，60 次的模擬中逼近卡方拒絕域的 11.07 臨界值，可接受骰子是公正的；經過次數增加而所得出的卡方值也越來越大，會拒絕骰子是公正的檢定假設也就越加明顯，正顯示出隨著實驗次數增加時檢定力越強。

(三)『不公平』假設之下 骰子投擲 60 次、90 次、120 次各點數次數分配表（附錄D）

投擲次數	丟擲60次			丟擲 90 次			丟擲 120 次		
點數	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k
1	6	**6**	0	8	**9**	－1	12	**12**	0
2	5	**6**	－1	7	**9**	－2	8	**12**	－4
3	9	**6**	3	12	**9**	3	13	**12**	1
4	9	**6**	3	12	**9**	3	14	**12**	2
5	16	**18**	－2	26	**27**	－1	36	**36**	0
6	15	**18**	－3	25	**27**	－2	37	**36**	1
總和	60	60	0	90	90	0	120	120	0

(四)分析

1. 投擲 60 次假定不公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲不公正的骰子時

H0： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/10$，

$P_5 = P_6 = 3/10$

H1： $P_i \neq 1/10$, 有個 $i = 1,2,3,4$，

或有個 $j = 5,6$ 使得 $P_j \neq 3/10$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \frac{(6-6)^2}{6} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} + \frac{(9-6)^2}{6} + \frac{(16-18)^2}{18} + \frac{(15-18)^2}{18} = 3.89$$

六個類別對應之自由度 df＝6－1＝5。由於 $\chi^2 = 3.89 < X_5^2 = 11.07$，表示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H0 假設，也就是無法拒絕此顆骰子其各點數機率分別爲 $P_5 = P_6 = 3/10$，$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/10$ 的假設。

2. 投擲 90 次假定不公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲不公正的骰子時

H0： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/10$，

$P_5 = P_6 = 3/10$

H1： $P_i \neq 1/10$, 有個 $i = 1,2,3,4$，

或有個 $j = 5,6$ 使得 $P_j \neq 3/10$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \frac{(8-9)^2}{9} + \frac{(7-9)^2}{9} + \frac{(12-9)^2}{9} + \frac{(12-9)^2}{9} + \frac{(26-27)^2}{27} + \frac{(25-27)^2}{27} = 2.74$$

由於 $\chi^2 = 2.74 < X_5^2 = 11.07$，顯示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H0 假設，也就是無法拒絕此顆骰子其各點數機率分別爲 $P_5 = P_6 = 3/10$，$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/10$ 的假設。

3. 投擲 120 次假定不公平骰子卡方檢定：

檢定假設爲不公正的骰子時

H0： $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/10$，

$P_5 = P_6 = 3/10$

H1： $P_i \neq 1/10$, 有個 $i = 1,2,3,4$，

或有個 $j = 5,6$ 使得 $P_j \neq 3/10$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \frac{(12-12)^2}{12} + \frac{(8-12)^2}{12} + \frac{(13-12)^2}{12} + \frac{(14-12)^2}{12} + \frac{(36-36)^2}{36} + \frac{(37-36)^2}{36} = 1.78$$

六個類別對應之自由度 df＝6－1＝5。由於 $\chi^2 = 1.78 < X_5^2 = 11.07$，顯示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H0 假設，也就是無法拒絕此顆骰子其各點數機率分別爲 $P_5 = P_6 = 3/10$，$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/10$的假設。

由此三種骰子模擬情況可知，三種都無法拒絕 $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1/10$，$P_5 = P_6 = 3/10$ 的假設，恰好符合一開始骰子模擬規則的機率分佈情況，並且隨著實驗次數的增加，其卡方值越小，可依稀體會大數法則的收斂表現。

三、模擬不公平骰子投擲情況 B

(一)『公平』假設之下 骰子投擲 60 次、90 次、120 次各點數次數分配表(參考附錄 E)

投擲次數	丟擲60次			丟擲 90 次			丟擲 120 次		
點數	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k
1	11	**10**	1	15	**15**	0	20	**20**	0
2	18	**10**	8	24	**15**	9	27	**20**	7
3	5	**10**	－5	9	**15**	－6	13	**20**	－7
4	3	**10**	－7	6	**15**	－9	8	**20**	－12
5	13	**10**	3	20	**15**	5	29	**20**	9
6	10	**10**	0	16	**15**	1	23	**20**	3
總和	60	60	0	90	90	0	120	120	0

(二)分析

1. 投擲 60 次公平的骰子卡方檢定：

檢定假設為公正的骰子時

H_0： $P_1=P_2=P_3=P_4=P_5=P_6=1/6$

H_1： $P_i\neq 1/6$ 有個 $i=1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2=\sum_{k=1}^{6}\frac{(O_k-E_k)^2}{E_k}$$

$$=\frac{(11-10)^2}{10}+\frac{(18-10)^2}{10}+\frac{(5-10)^2}{10}+\frac{(3-10)^2}{10}+\frac{(13-10)^2}{10}+\frac{(10-10)^2}{10}$$

$$=14.8$$

六個類別對應之自由度 df＝6－1＝5。由於 $\chi^2=14.8>\mathrm{X}_5^2=11.07$，表示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料拒絕 H_0 假設，也就是在偏離較大情況下不能接受骰子是公正的。

2. 投擲 90 次公平的骰子卡方檢定：

檢定假設為公正的骰子時

H_0： $P_1=P_2=P_3=P_4=P_5=P_6=1/6$

H_1： $P_i\neq 1/6$ 有個 $i=1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2=\sum_{k=1}^{6}\frac{(O_k-E_k)^2}{E_k}$$

$$=\frac{(15-15)^2}{15}+\frac{(24-15)^2}{15}+\frac{(9-15)^2}{15}+\frac{(6-15)^2}{15}+\frac{(20-15)^2}{15}+\frac{(16-15)^2}{15}$$

$$=14.93$$

六個類別對應之自由度 df＝6－1＝5。

由於 $\chi^2 = 14.93 > X_5^2 = 11.07$，表示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料拒絕 H_0 假設，也就是**不能接受**骰子是公正的。

3. **投擲 120 次公平的骰子卡方檢定：**

檢定假設爲**公正**的骰子時

H_0：$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P_5 = P_6 = 1/6$

H_1：$P_i \neq 1/6$ 有個 $i = 1,2,3,4,5,6.$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \frac{(20-20)^2}{20} + \frac{(27-20)^2}{20} + \frac{(13-20)^2}{20} + \frac{(8-20)^2}{20} + \frac{(29-20)^2}{20} + \frac{(23-20)^2}{20}$$

$$= 16.6$$

由於 $\chi^2 = 16.6 > X_5^2 = 11.07$，顯示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料拒絕 H_0 假設，也就是**不能接受**骰子是公正的。

此三種投擲次數的骰子模擬結果與情況 A 不完全相同，情況 A 的樣本數只有 60 次時，尚無法拒絕 H_0 假設，但是情況 B 的模擬資料則拒絕了 H_0 假設，這算是一種隨機性的展現。此外，隨著實驗次數的增加其卡方值越大，是檢定力越強的表現。相較於情況 A 的模擬資料則有**卡方值增加**較爲緩和的趨勢，也是忠實反應原始模擬資料的較小偏離分佈特性，此差距是偏離公正骰子的大小或程度。

（三）『不公平』假設之下 骰子投擲 60 次、90 次、120 次各點數次數分配表（附錄 E）

投擲次數	丟擲60次			丟擲 90 次			丟擲 120 次		
點數	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k	O_k次數	E_k次數	O_k-E_k
1	11	**12**	－1	15	**18**	－3	20	**24**	－4
2	18	**12**	6	24	**18**	6	27	**24**	3
3	5	**6**	－1	9	**9**	0	13	**12**	1
4	3	**6**	－3	6	**9**	－3	8	**12**	－4
5	13	**12**	1	20	**18**	2	29	**24**	5
6	10	**12**	－2	16	**18**	－2	23	**24**	－1
總和	60	60	0	90	90	0	120	120	0

（四）分析

1. 投擲 60 次假定不公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲不公正的骰子時

H_0：$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1/5$，
$P_3 = P_4 = 1/10$

H_1：$P_i \neq 1/5,$ 有個 $i = 1,2,5,6$，
或有個 $j = 3, 4$ 使得 $P_j \neq 1/10$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \frac{(11-12)^2}{12} + \frac{(18-12)^2}{12} + \frac{(5-6)^2}{6} + \frac{(3-6)^2}{6} + \frac{(13-12)^2}{12} + \frac{(10-12)^2}{12} = 5.17$$

六個類別對應之自由度 df＝6－1＝5。由於 $\chi^2 = 5.17 < X_5^2 = 11.07$，表示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H_0 假設，也就是無法拒絕此顆骰子其各點數機率分別爲 $P_3 = P_4 = 1/10$，$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1/5$ 的假設。

2. 投擲 90 次假定不公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲不公正的骰子時

H_0：$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1/5$，
$P_3 = P_4 = 1/10$

H_1：$P_i \neq 1/5,$ 有個 $i = 1,2,5,6$，
或有個 $j = 3, 4$ 使得 $P_j \neq 1/10$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \frac{(15-18)^2}{18} + \frac{(24-18)^2}{18} + \frac{(9-9)^2}{9} + \frac{(6-9)^2}{9} + \frac{(20-18)^2}{18} + \frac{(16-18)^2}{18} = 3.94$$

由於 $\chi^2 = 3.94 < X_5^2 = 11.07$，顯示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H_0 假設，也就是無法拒絕此顆骰子其各點數機率分別爲 $P_3 = P_4 = 1/10$，$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1/5$ 的假設。

3. 投擲 120 次假定不公平的骰子卡方檢定：

檢定假設爲不公正的骰子時

H_0：$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1/5$，
$P_3 = P_4 = 1/10$

H_1：$P_i \neq 1/5,$ 有個 $i = 1,2,5,6$，
或有個 $j = 3, 4$ 使得 $P_j \neq 1/10$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{6} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$$

$$= \frac{(20-24)^2}{24} + \frac{(27-24)^2}{24} + \frac{(13-12)^2}{12} + \frac{(8-12)^2}{12} + \frac{(29-24)^2}{24} + \frac{(23-24)^2}{24} = 3.54$$

六個類別對應之自由度 df＝6－1＝5。由於 $\chi^2 = 3.54 < X_5^2 = 11.07$，顯示在顯著水準 0.05 下，此觀察資料無法拒絕 H_0 假設，也就是無法拒絕此顆骰子其各點數機率分別爲 $P_3 = P_4 = 1/10$，$P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1/5$ 的假設。

由三種投擲次數的骰子模擬可知，都無法拒絕 $P_1 = P_2 = P_5 = P_6 = 1/5$ 、$P_3 = P_4 = 1/10$ 的假設，恰好符合一開始骰子模擬規則的機率分配之設定情況，並且隨著實驗次數的增加，其卡方值越小，可依稀感受大數法則所呈現的穩定狀態。

肆、新奇感受與心得分享

透過『具體操作』來模擬骰子投擲的實驗過程中，我們初步體會到「隨機性」的情境，每個人在亂數表中之初始位置皆不相同，然而大家遵循共同之遊戲規則，得出來的結果雖然整個路徑是不一樣，但是經過整理之後的卡方值，卻有可掌握的共通之處：模擬公平骰子的大多符合公平骰子的結論；模擬不公平骰子的資料若要假想是公平骰子時，幾乎是無法通過符合公平的檢驗；然而當我們如實地作不公平骰子假設之時，就可能會通過卡方檢定。這也讓我們體會到卡方檢定的精髓，或可類比爲人與人間的溝通交流，人們常會使用自己心中認爲「公平」的量尺，要去衡量周遭的人，往往沒想過要將心比心的用當事人的尺度來看待，所以常常造成期待的落差。此隨機模擬實驗的有趣，第一位作者推廣到任教的班級，讓同學們體會出數學與統計結合的奧妙，透過具體操作來給予學生有個數學的學習新體驗，不再是感覺生硬、理論的數學，而是有趣而靈活的數學。此外，我們整理一些同時修讀此課程之同學們的感受作爲分享:『完成這個作業是很奇妙的經驗，讓我體驗亂數表竟然可以這樣運用，改變了我對機率與統計的刻板印象，不再會害怕思考這一類的問題。』“初次體會了隨機的趣味，更對機率的理解有了更深一層的體認，機率不再只是以往單一想法的計算。”「對於這次投擲骰子隨機性遊戲，讓我有了新的體驗，原來骰子遊戲可以藉由亂數表來模擬真實投擲情境。以往對於機率的接觸，總是局限在瞭解理論、透過演算練習題來加深機率公式的印象，卻不知該如何運用在生活中，只能按照老師教導的機率內容來學習。」『學生過去對於機率的概念大多由課堂教材學習得知，鮮少對於真實生活情境加以實驗或證明，雖然本次活動並非實際投擲骰子，但能將亂數表透過操作呈現其隨機性，同時在課堂的討論分享與意見交流，讓我對於隨機性有更多的了解。』“從求學開始到現在身為教師，接觸數學、機率已有多年，但殊不知亂數表竟可以如此神奇的運用在機率的活動中，著實讓我在這門科目中乍現幾許曇花！更是個奇妙的體驗！經由這一次的操作，讓我對教學產生幾許不同的省思，也激盪出不同思緒，在冰冷生硬的數學理論架構，在學生心中嚴肅無聊得數學世界裡，其實是可以透過活動賦予它生命力和活力，諸如這一次，利用亂數表為平凡無奇的骰子投擲，增添了許多意想不到的精采呢！我想，這是我往後在教學活動中又獲得的一項可貴的豐富資產喔！”「透過此次實作活動，發現亂數表雖然表面上是由一堆亂七八糟的數字所組合而成，卻是亂中有序！就卡方檢定值而言，結果是漂亮地落在接受區！正因如此，亂數表在我的認知概念中徹底改觀，它不再是一個雜亂無章的數字表格，現在的它已是一份良好工具，讓我可以放心的透過它來了解隨機性遊戲的奧秘。」“過去學機率的經驗只是不停的做紙筆運算，隨機一詞對我而言更

是抽象，但這次藉由亂數表的模擬活動，及同學們模擬後的成果分享，讓我體驗了隨機中的『亂中有序』、『異中求同』之真諦。”

伍、結論

藉由一個簡單的亂數表來模擬投擲骰子的『具體操作』遊戲，不難從中體驗到隨機性之真諦(黃文璋，2003)，從事中小學教職的修課同學們置身其境而體會到可以活化數理課程的教學活動等，普遍的反應均是正面而肯定的。我們在初步階段分成公平與不公平兩種情況下，進一步將不公平的情境設計兩種不同偏離程度以作比較，大家依循相同遊戲規則來模擬骰子投擲一百二十次，分別整理了 60 次、90 次、120 次的結果，經過卡方值的適合度檢定來做觀察和分析比較，次數由少到多所反應出來的趨勢，可呼應潛藏的理論或法則，也逐步展現出原始資料的自然狀態，藉此可多元地體驗隨機中的穩定性、趨勢性、檢定力和大數法則等重要觀念(黃文璋，2003；鄭惟厚，1998；Berry and Lindgren , 1996)。此外，陳仁義、魏志安、鄭信源（2007）指出：``機率概念並不是單靠「一個人」、「當下」的情況來解釋的，需要有多個人或多次「重複性」在「長期」的情境中運作，才能有效地呈現。”這也強調了分享和討論的重要性。因此，相關課程的教學活動中若能設計類似的遊戲，讓學生們從做中學來體驗數理概念，將會比單純講述和理論推導更容易引起學生的學習動機。附錄 B 中有 EXCEL 的原始碼可精確而較爲快速完成『具體操作』遊戲，並可多元化設計大量的重複操弄遊戲情境來完成多樣化結果，以加深體會檢定力和大數法則等重要概念。

陸、誌謝：

本文之順利完成要感謝國科會計畫 NSC98-2511-S-343-001-M 的補助。此外，嘉大數教所修課同學們的心得報告和課堂討論也是本文的重要素材。

柒、參考書目

黃文璋著(2003)：**隨機思考論**。台北：華泰文化。

陳仁義、魏志安、鄭信源(2007)：一個隨機遊戲中的機率概念。台灣數學教師(電子)期刊，12，33-46。

鄭惟厚譯(1998)。**統計，讓數字說話**。台北：天下文化。

Berry and Lindgren (1996), *Statistics: Theory and Methods* (2nd), Belmont. CA: Duxbury.

捌、附錄

A、亂數表

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]	[,8]	**[,9]**	[,10]
[1,]	0.372	0.423	0.815	0.656	0.398	0.150	0.907	0.409	0.254	0.034
[2,]	0.044	0.321	0.810	0.915	0.140	0.459	0.762	0.823	0.856	0.646
[3,]	0.710	0.198	0.610	0.715	0.079	0.619	0.486	0.535	0.220	0.963
[4,]	0.658	0.163	0.993	0.183	0.550	0.956	0.250	0.491	0.186	0.361
[5,]	0.250	0.523	0.843	0.240	0.261	0.101	0.359	0.014	0.022	0.970
[6,]	0.300	0.913	0.716	0.836	0.810	0.228	0.009	0.643	0.465	0.492
[7,]	0.585	0.207	0.019	0.386	0.545	0.555	0.236	0.320	0.297	0.932
[8,]	0.333	0.814	0.305	0.233	0.474	0.771	0.106	0.534	**0.189**	0.601
[9,]	0.622	0.020	0.883	0.069	0.664	0.480	0.611	0.954	0.668	0.352
[10,]	0.546	0.925	0.941	0.062	0.092	0.881	0.205	0.040	0.281	0.088
[11,]	0.880	0.435	0.234	0.125	0.651	0.968	0.215	0.285	0.220	0.182
[12,]	0.707	0.442	0.937	0.023	0.368	0.690	0.016	0.492	0.490	0.110
[13,]	0.732	0.761	0.567	0.392	0.246	0.867	0.328	0.481	0.225	0.368
[14,]	0.932	0.333	0.843	0.860	0.299	0.560	0.270	0.438	0.821	0.009
[15,]	0.455	0.394	0.821	0.718	0.559	0.305	0.914	0.438	0.382	0.079
[16,]	0.590	0.233	0.280	0.339	0.480	0.999	0.418	0.186	0.627	0.299
[17,]	0.820	0.072	0.047	0.081	0.477	0.293	0.691	0.945	0.952	0.586
[18,]	0.224	0.913	0.225	0.037	0.936	0.903	0.900	0.145	0.778	0.703
[19,]	0.412	0.772	0.673	0.773	0.470	0.042	0.208	0.779	0.107	0.749
[20,]	0.039	0.108	0.959	0.995	0.678	0.599	0.461	0.813	0.230	0.314
[21,]	0.701	0.079	0.685	0.147	0.934	0.681	0.606	0.220	0.217	0.387
[22,]	0.957	0.434	0.776	0.040	0.274	0.983	0.563	0.317	0.693	0.988
[23,]	0.213	0.680	0.776	0.566	0.947	0.502	0.277	0.264	0.597	0.681
[24,]	0.661	0.734	0.983	0.889	0.313	0.743	0.226	0.522	0.279	0.889
[25,]	0.923	0.453	0.010	0.871	0.876	0.911	0.984	0.203	0.443	0.319
[26,]	0.796	0.784	0.953	0.982	0.167	0.988	0.098	0.653	0.897	0.462
[27,]	0.071	0.680	0.323	0.880	0.469	0.765	0.880	0.277	0.054	0.405
[28,]	0.389	0.519	0.428	0.510	0.652	0.821	0.233	0.409	0.664	0.926
[29,]	0.406	0.691	0.134	0.334	0.034	0.940	0.772	0.837	0.829	0.327
[30,]	0.659	0.588	0.018	0.613	0.435	0.672	0.472	0.435	0.752	0.111

Generating method by R: > **set.seed(101)**
> rnmtrx<-matrix(round(1000*(runif(300)))/1000,c(30,10))

B、使用EXCEL計算的原始碼

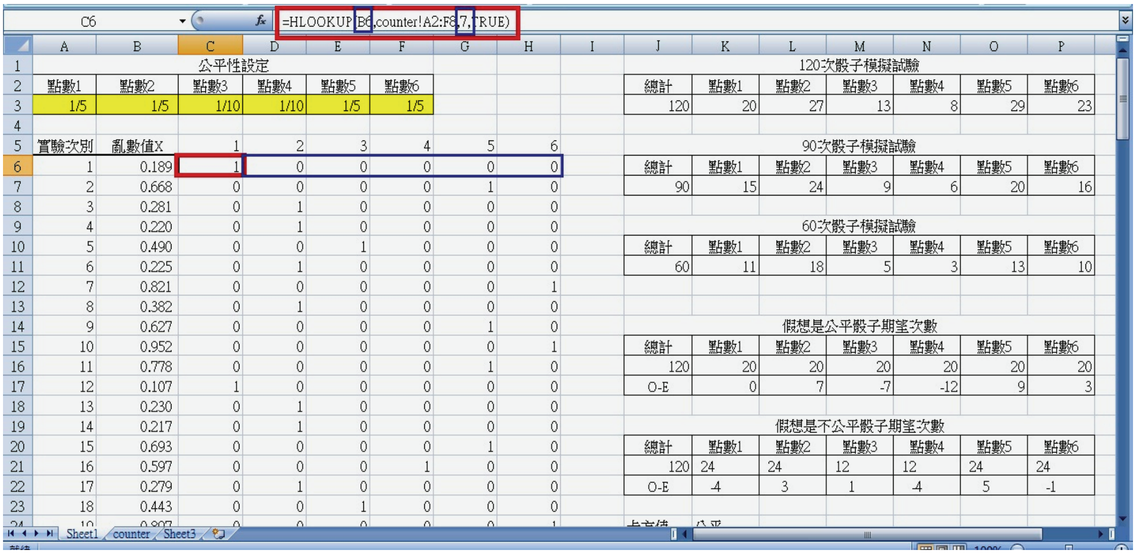
步驟1.請先開啓一個新的EXCEL檔(預設工作表爲Sheet1)，並輸入底下設定表格：

	A	B	C	D	E	F
1	公平性設定					
2	點數 1	點數 2	點數 3	點數 4	點數 5	點數 6
3	1/5	1/5	1/10	1/10	1/5	1/5

步驟2.新增一個工作表，名稱自訂，筆者以「counter」舉例，並輸入底下表格：

	A	B	C	D	E	F
0	點數 1	點數 2	點數 3	點數 4	點數 5	點數 6
1	0	=Sheet1!A3	=B2+Sheet1!B3	=C2+Sheet1!C3	=D2+Sheet1!D3	=E2+Sheet1!E3
2	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0
7	1	0	0	0	0	0

步驟3.返回工作表Sheet1，並仿照輸入如下圖：


C6 =HLOOKUP(B6,counter!A2:F8,7,TRUE)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	公平性設定							
2	點數1	點數2	點數3	點數4	點數5	點數6		
3	1/5	1/5	1/10	1/10	1/5	1/5		
4								
5	實驗次別	亂數值X	1	2	3	4	5	6
6	1	0.189	1	0	0	0	0	0
7	2	0.668	0	0	0	0	1	0
8	3	0.281	0	1	0	0	0	0
9	4	0.220	0	1	0	0	0	0
10	5	0.490	0	0	1	0	0	0
11	6	0.225	0	1	0	0	0	0
12	7	0.821	0	0	0	0	0	1
13	8	0.382	0	1	0	0	0	0
14	9	0.627	0	0	0	0	1	0
15	10	0.952	0	0	0	0	0	1
16	11	0.778	0	0	0	0	1	0
17	12	0.107	1	0	0	0	0	0
18	13	0.230	0	1	0	0	0	0
19	14	0.217	0	1	0	0	0	0
20	15	0.693	0	0	0	0	1	0
21	16	0.597	0	0	0	1	0	0
22	17	0.279	0	1	0	0	0	0
23	18	0.443	0	0	1	0	0	0

	J	K	L	M	N	O	P
1	120次骰子模擬試驗						
2	總計	點數1	點數2	點數3	點數4	點數5	點數6
3	120	20	27	13	8	29	23
5	90次骰子模擬試驗						
6	總計	點數1	點數2	點數3	點數4	點數5	點數6
7	90	15	24	9	6	20	16
9	60次骰子模擬試驗						
10	總計	點數1	點數2	點數3	點數4	點數5	點數6
11	60	11	18	5	3	13	10
14	假想是公平骰子期望次數						
15	總計	點數1	點數2	點數3	點數4	點數5	點數6
16	120	20	20	20	20	20	20
17	O-E	0	7	-7	-12	9	3
19	假想是不公平骰子期望次數						
20	總計	點數1	點數2	點數3	點數4	點數5	點數6
21	120	24	24	12	12	24	24
22	O-E	-4	3	1	-4	5	-1

Sheet1 counter Sheet3

注意：C6格輸入的程式碼： =HLOOKUP(B6, counter!A2:F8, **7**, TRUE)
D6格輸入的程式碼： =HLOOKUP(B6, counter!A2:F8, **6**, TRUE)
E6格輸入的程式碼： =HLOOKUP(B6, counter!A2:F8, **5**, TRUE)
F6格輸入的程式碼： =HLOOKUP(B6, counter!A2:F8, **4**, TRUE)
G6格輸入的程式碼： =HLOOKUP(B6, counter!A2:F8, **3**, TRUE)
H6格輸入的程式碼： =HLOOKUP(B6, counter!A2:F8, **2**, TRUE)
C7格輸入的程式碼： =HLOOKUP(B7, counter!A2:F8, **7**, TRUE)
依此類推~ (可用EXCEL的拖曳功能)

步驟4.上圖中右方的表格和卡方值計算方式，請參閱EXCEL使用手冊

C:模擬公平骰子丟擲120次資料表 (p1=p2=p3=p4=p5=p6=1/6)

注意：亂數初始位置為(8,9)且亂數初始值為0.189。

實驗次別	亂數值 X	1	2	3	4	5	6
1	0.189	0	1	0	0	0	0
2	0.668	0	0	0	0	1	0
3	0.281	0	1	0	0	0	0
4	0.220	0	1	0	0	0	0
5	0.490	0	0	1	0	0	0
6	0.225	0	1	0	0	0	0
7	0.821	0	0	0	0	1	0
8	0.382	0	0	1	0	0	0
9	0.627	0	0	0	1	0	0
10	0.952	0	0	0	0	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
111	0.519	0	0	0	1	0	0
112	0.691	0	0	0	0	1	0
113	0.588	0	0	0	1	0	0
114	0.815	0	0	0	0	1	0
115	0.810	0	0	0	0	1	0
116	0.610	0	0	0	1	0	0
117	0.993	0	0	0	0	0	1
118	0.843	0	0	0	0	0	1
119	0.716	0	0	0	0	1	0
120	0.019	1	0	0	0	0	0
實際觀察次數		17	22	21	17	26	17
期望公平次數		20	20	20	20	20	20

D:模擬不公平骰子丟擲120次資料表 (p1=p2=p3=p4=1/10，p5=p6=3/10)

注意：亂數初始位置為(8,9)且亂數初始值為0.189。

實驗次別	亂數值 X	1	2	3	4	5	6
1	0.189	0	1	0	0	0	0
2	0.668	0	0	0	0	1	0
3	0.281	0	0	1	0	0	0
4	0.220	0	0	1	0	0	0
5	0.490	0	0	0	0	1	0
6	0.225	0	0	1	0	0	0
7	0.821	0	0	0	0	0	1

8	0.382	0	0	0	1	0	0
9	0.627	0	0	0	0	1	0
10	0.952	0	0	0	0	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
116	0.610	0	0	0	0	1	0
117	0.993	0	0	0	0	0	1
118	0.843	0	0	0	0	0	1
119	0.716	0	0	0	0	0	1
120	0.019	1	0	0	0	0	0
實際觀察次數		12	8	13	14	36	37
期望次數(公平)		20	20	20	20	20	20
期望次數(不公平)		12	12	12	12	36	36

E:模擬不公平骰子丟擲120次資料表 (p1=p2=p5=p6=1/5，p3=p4=1/10)

注意：亂數初始位置爲(8,9)且亂數初始值爲0.189。

實驗次別	亂數值 X	1	2	3	4	5	6
1	0.189	1	0	0	0	0	0
2	0.668	0	0	0	0	1	0
3	0.281	0	1	0	0	0	0
4	0.220	0	1	0	0	0	0
5	0.490	0	0	1	0	0	0
6	0.225	0	1	0	0	0	0
7	0.821	0	0	0	0	0	1
8	0.382	0	1	0	0	0	0
9	0.627	0	0	0	0	1	0
10	0.952	0	0	0	0	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
116	0.610	0	0	0	0	1	0
117	0.993	0	0	0	0	0	1
118	0.843	0	0	0	0	0	1
119	0.716	0	0	0	0	1	0
120	0.019	1	0	0	0	0	0
實際觀察次數		20	27	13	8	29	23
期望次數(公平)		20	20	20	20	20	20
期望次數(不公平)		24	24	12	12	24	24