中學生通訊解題第七十三期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
7301

在如下△位置應該填入哪一個數字，就能使此數為 的倍數。

$$\underbrace{22\cdots22}_{50個2}\Delta\underbrace{33\cdots33}_{50個3}$$

參考解答：

因為 $7\,|\,111111$，所以

$\underbrace{22\cdots22}_{50個6}\Delta\underbrace{33\cdots33}_{50個5}$

$=\underbrace{22\cdots22}_{48個6}\times10^{53}+22\Delta33\times10^{48}+\underbrace{33\cdots33}_{48個5}$

由於 $7\,|\,\underbrace{22\cdots22}_{48個6}\times10^{53}$ 且 $7\,|\,\underbrace{33\cdots33}_{48個5}$，

故只要 $7\,|\,22\Delta33\times10^{48}$ 即可，又

$(7,10^{48})=1$，故 $7\,|\,22\Delta33$ 即可，

$22\Delta33=21028+1\Delta05=7\times3004+1\Delta05$

可知只有當 $\Delta=5$ 時成立。

解題評註：
同學可以善用數學代數式表達想法，否則容易顯的較為雜亂無序。

問題編號
7302

對於任何一個三位數 n，定義 $f(n)$ 為 n 的三個數字加上兩兩乘積再加上三個數字的乘積。求所有的三位數 n，使得 $\dfrac{f(n)}{n}=1$。

參考解答：

設 n 的百位數字為 a、十位數字為 b、個位數字為 c，由

$\dfrac{f(n)}{n}=1\Rightarrow f(n)=n$

$\Rightarrow a+b+c+ab+bc+ca+abc$

$=100a+10b+c$

得 $c=\dfrac{99a+9b-ab}{a+b+ab}$，由 $c\le9$ 得 $99a+9b-ab\le9(a+b+ab)$，化簡得 $90a\le10ab$，由 $a\ge1$，因此 $b\ge9$，得 $b=9$。

代回得 $c=\dfrac{90a+81}{10a+9}=9$，故 n 的十位數字為 9、個位數字為 9，又 $a=1,2,\cdots,9$ 代回時都滿足 $\dfrac{f(n)}{n}=1$，故

$n=199,299,399,499,599,699,799,899,999$

解題評註：

只要利用條件討論每位數字的範圍即可。

本題由時間長度可知至少要複製 600 遍，再由費氏數列可求出至少要 15 次的互拷。

問題編號
7303

某百貨公司在過年期間，想要在門口的電視牆上播放一個廣告節目，這個廣告節目播放的時間是 12 秒鐘，如果開始只有一段 12 秒的錄像影帶母帶，若想用 2 盤空白錄像帶在一台錄相機上互相轉錄，問應如何操作，才能用最少的錄製遍數來錄製一盤可以播放 2 小時的廣告節目？

參考解答：

2 小時＝7200 秒，7200÷12＝600(遍)

第一步：將母帶上的節目錄入第一盤空白帶

第二步：將母帶上的節目錄入第二盤空白帶

第三步：將第一盤的節目錄入第二盤錄像帶

第四步：將第二盤的節目錄入第一盤錄像帶

一直重複第三與第四步驟，直到錄入所需的時間爲止。

我們用 a_k 來表示第 k 步所錄入節目的遍數，於是

$$a_1=1, a_2=1, a_3=2, a_4=3, \cdots$$

則可得到斐波拉契數列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，

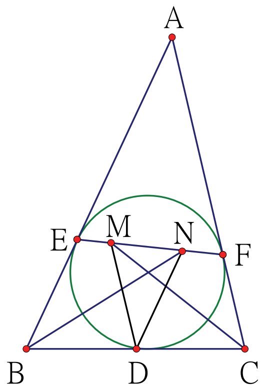
由 610＞600，故連續操作 15 次即可。

解題評註：

問題編號
7304

如圖，$\triangle ABC$ 的內切圓分別切 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 E、F，D 是 $\overline{BC}$ 的中點，$\angle B$、$\angle C$ 的平分線分別與直線 $\overleftrightarrow{EF}$ 交於 N、M。

證明：$\overline{DM}=\overline{DN}$



參考解答：

證明：【方法一】

設內心爲 I，作 $\overline{IA}$、$\overline{IE}$、$\overline{IF}$、$\overline{BM}$、$\overline{CN}$。則 A、E、I、F 四點共圓，有

$\angle IEF=\angle IAF=\dfrac{\angle A}{2}$，$\angle BEM=90^0+\dfrac{\angle A}{2}$

$$\angle BIC=90^0-\frac{\angle B}{2}+90^0-\frac{\angle C}{2}$$

$$=90^0+\frac{\angle A}{2}=\angle BEM$$

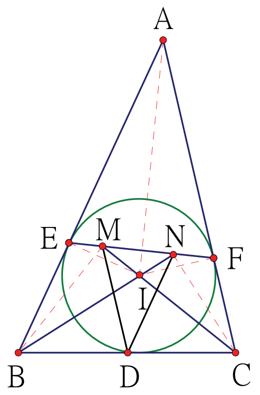
$\therefore$ B、E、M、I 四點共圓

於是 $\angle BMI = \angle BEI = 90^0$

同理 $\angle BNC = 90^0$

故 $\overline{DM}$ 、 $\overline{DN}$ 分別是直角△BMC、直角△BNC 斜邊 $\overline{BC}$ 上的中線，

$\therefore \overline{DM} = \overline{DN} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$



【方法二】台北縣中和國中 梁同學的作法

解析幾何的方法：

1. 設內心爲 I，不妨設 $I(0,0)$，

   圓 I 爲 $x^2+y^2=1$， $\overleftrightarrow{EF}$ ：$y=b$ ，

   設△ABC 的內切圓切 $\overline{BC}$ 於 G，

   $E(-a,b)$，$F(a,b)$，$G(r,s)$，

   $\Rightarrow$ 過 E 切線 $\overleftrightarrow{AB}$ ：$-ax+by=1$

   過 F 切線 $\overleftrightarrow{AC}$ ：$ax+by=1$

   過 G 切線 $\overleftrightarrow{BC}$ ：$rx+sy=1$

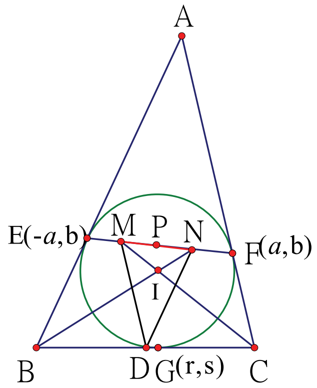
   $\because$ E、F 在圓上

   $\therefore a^2+b^2=1$，$r^2+s^2=1$

   $\Rightarrow a^2=1-b^2$ ，$r^2=1-s^2=1$ ……(*)

2. 解 $\begin{cases} -ax+by=1 \\ rx+sy=1 \end{cases}$，得

   $B(\dfrac{b-s}{rb+as},\dfrac{a+r}{rb+as})$



3. 解 $\begin{cases} ax+by=1 \\ rx+sy=1 \end{cases}$，得 $C(\dfrac{b-s}{rb-as},\dfrac{-a+r}{rb-as})$

4. $\because D$ 是 $\overline{BC}$ 的中點

   $\therefore D(\dfrac{1}{2}[\dfrac{b-s}{rb+as}+\dfrac{b-s}{rb-as}],\dfrac{1}{2}[\dfrac{a+r}{rb+as}+\dfrac{-a+r}{rb-as}])$

   又由(*)式 $\Rightarrow D(\dfrac{rb}{b+s},\dfrac{1+bs}{b+s})$

5. 解 $\begin{cases} \overleftrightarrow{BI}:\dfrac{b-s}{rb+as}y=\dfrac{a+r}{rb+as}x \\ \overleftrightarrow{EF}:y=b \end{cases}$，得

   $N(\dfrac{b^2-bs}{a+r},b)$

6. 解 $\begin{cases} \overleftrightarrow{CI}:\dfrac{b-s}{rb-as}y=\dfrac{-a+r}{rb-as}x \\ \overleftrightarrow{EF}:y=b \end{cases}$，得

   $M(\dfrac{b^2-bs}{-a+r},b)$

7. 設 P 是 $\overline{MN}$ 的中點

   $P(\dfrac{1}{2}[\dfrac{b^2-bs}{a+r}+\dfrac{b^2-bs}{-a+r}],b)$，又由(*)式

   $\Rightarrow P(\dfrac{rb}{b+s},b)$

8. 由 4.7.得 D、P 在鉛直線 $x=\dfrac{rb}{b+s}$

$\because P$ 是 $\overline{MN}$ 的中點，$\overleftrightarrow{DP}\perp\overleftrightarrow{MN}$

$\therefore \overline{DM}=\overline{DN}$

解題評註：

1. 【方法一】利用作輔助線、內心的性質、四點共圓的性質以及直角△斜邊的中點到三頂點等距來得到證明。
2. 【方法二】利用解析幾何的方法，利用代數，求出切線方程式，兩線交點，中垂線上任一點到兩端點等距的性質來得證。

問題編號
7305

$1\Delta2\Delta3\Delta\cdots\Delta2008\Delta2009=1$，其中 Δ 只能填入＋或－，試求最少需填入幾個＋？

參考解答：

最少需填入 589 個＋。

(i) 因為

$$1+2+3+\cdots+2008+2009$$
$$=\frac{1+2009}{2}\times2009=2019045$$

$1\Delta2\Delta3\Delta\cdots\Delta2008\Delta2009=1$，將上述兩式相加並除以 2，得那些前面的運算符號是＋的數字和為

$$\frac{2019045+1}{2}=1009523$$

但 1 前面的符號是＋，所以依題意要從 $2,3,\cdots,2009$ 中找到最少個數字，並滿足總和為 1009522(=1009523-1)即為所求。

(ii) 承(i)，因為總和是固定的，又要使得個數最少，勢必要從數字大的下手，經計算

$$1422+1423+\cdots+2009$$
$$=\frac{1422+2009}{2}\times588$$
$$=1008714<1009522$$

所以從 $2,3,\cdots,2009$ 中想要靠 588 個以下(含 588 個)的數字，完成總和是 1009522 是不可能的！不過只要在上式加入 808 這個數字，得

$$808+1422+1423+\cdots+2009$$
$$=808+1008714=1009522$$

就完成了滿足題意的解(非唯一解)，因此

$$1-2-3-\cdots\cdots-807+808-809$$
$$-810-\cdots\cdots-1421+1422+1423$$
$$+\cdots+2009=1$$

就是滿足題意且填入最少個＋的情況(共使用了 589 個＋號)。

解題評註：

大多數同學都是採取和解答相似的做法，惟有兩位同學方法正確，但因計算錯誤，導致答案與正解有微小的出入；此外有些同學，給出了滿足方程式的解，但題目要

的是最少需填入幾個＋，沒有再進一步的去調整或是討論，實在可惜！

問題編號
7306

在〝恰恰好〞市場中買東西時，攤販只接受與商品售價相等的付款方式，例如售價 8 元的商品，我們可以 8 個 1 元硬幣、或是 1 個 5 元加上 3 個 1 元硬幣購買。今日小建帶著總額不到 100 元的硬幣若干個（新臺幣硬幣幣額共有 50 元、10 元、5 元、1 元 4 種）到此市場消費，已知小建原本可以支付的款項（在前例中：$8=1\times 8=1\times 3+5\times 1$ 爲同一種款項）有 32 種（包含 0 元），但若他將 1 個 10 元硬幣與他人交換爲 2 個 5 元硬幣，則可支付的款項會增加爲 56 種，若他將 1 個 10 元硬幣與他人交換爲 1 個 5 元硬幣加上 5 個 1 元硬幣，則可支付的款項會大於 56 種，試問小建〝原本〞攜帶的硬幣面額及個數爲何？

參考解答：

50 元硬幣 1 個、10 元硬幣 3 個、1 元硬幣 3 個。

一般來說，付款的方式會多於可支付的款項數，這個情形在什麼時候會發生呢？如題例，當我們欲支付 8 元的款項時，我們可以使用 8 個 1 元硬幣，或是選擇使用 1 個 5 元硬幣來替換 5 個 1 元硬幣，這就造成了付款方式多於支付的款項數，因此我們應盡量將大面額硬幣視爲小面額硬幣來使用，以保有支付款項的彈性並避免可支付款項的重複計算。

在做更進一步的討論之前，我們應先釐清一個觀念:「在什麼樣的條件之下，我們可將大面額硬幣等同小面額硬幣來使用？」我們若欲將 5 元硬幣當成 1 元硬幣使用，則 1 個 5 元硬幣可取代 5 個 1 元硬幣，但這不代表我們就可以購買 4 元的產品（因爲要恰恰好！），除非我們實質上擁有 4 個 1 元硬幣。所以，若我們擁有 4 個 1 元硬幣及 1 個 5 元硬幣，則我們等同於擁有 9 個 1 元硬幣，而可自由購買 1～9 元的產品，此時可支付的款項數就恰好等於 9 個 1 元硬幣所決定的付款方式數，而不會有重複計算的問題。

在本題中，(1) 小建將 1 個 10 元硬幣交換爲 2 個 5 元硬幣後，可支付的款項數會提升，這代表原本小建是無法將他手中的 10 元硬幣視爲 5 元硬幣來使用的，也就是說他原本並沒有 5 元硬幣。 (2) 小建將 1 個 10 元硬幣交換爲 1 個 5 元硬幣及 5 個 1 元硬幣後，可支付的款項數又再度向上攀升，代表原本小建是無法將他手中的 5 元硬幣視爲 1 元硬幣來使用的，也就是說他原本擁有的 1 元硬幣少於 4 個。

假設小建原本擁有 a 個 50 元硬幣、b 個 10 元硬幣、c 個 5 元硬幣及 d 個 1 元硬幣，則由總面額 ≤ 99 及上述討論可列出下列條件：

1. 原有組合

面額	個數	限制	可支付款項數
50	a	$a \le 1$	32
10	b	$b \ge 1$	
5	c	$c = 0$	
1	d	$d \le 3$	

2. 將 1 個 10 元硬幣換爲 2 個 5 元硬幣(只要有 1 個 5 元硬幣，則應將所有的 10 元硬幣替換爲 5 元硬幣，才不會造成款項計算上之重複）

面額	個數	限制	可支付款項數
50	a	$a \le 1$	$(a+1)(2b+1)(d+1)=56$
10	$b \to 0$	$b \ge 1$	
5	$2b$		
1	d	$d \le 3$	

3. 將 1 個 10 元硬幣換爲 1 個 5 元硬幣及 5 個 1 元硬幣（只要有 4 個 1 元硬幣，則應將所有的 5 元硬幣替換爲 1 元硬幣，才不會造成款項計算上之重複）

面額	個數	限制	可支付款項數
50	a	$a \le 1$	$(a+1)(d+10b+1)>56$
10	$b \to 0$	$b \ge 1$	
5	0		
1	$d \to d+10b$	$d \le 3$	

由 $(a+1)(2b+1)(d+1)=56$ 及 $a+1 \le 2$、$2b+1 \ge 3$、$d+1 \le 4$ 可推得：
$(a+1)(2b+1)(d+1)=56=2\times 7\times 4$
即 $(a,b,c,d)=(1,3,0,3)$。

解題評註：

本題有 3 位同學正確作答，皆掌握了原有各面額硬幣數目的基本限制，可惜並未充分掌握以大面額硬幣取代小面額硬幣使用的時機與限制，以及付款方式的計算方式與因數分解的討論，以致於後續皆是以近乎窮舉的方式來分析確實的硬幣數目，造成討論過程過於冗長。但三位同學對於此題的研究精神及在解題過程中展現出對數學問題嚴密的探究思考能力，仍值得嘉許。