中學生通訊解題第七十二期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
7201

假設有 A 國的人 3 位、B 國的人 3 位、C 國的人 3 位，現在將此九個人排成一列，且要求滿足以下條件：

1. A 國的人之後只能排 B 國或 C 國的人。
2. B 國的人之後只能排 C 國或 A 國的人。
3. C 國的人之後只能排 A 國或 B 國的人。
4. 第一位一定要排 A 國的人，最後一位一定要排 C 國的人。

問總共有幾種可能的排法？

參考解答：

(1) 設九個人爲 $A_1,A_2,A_3,B_1,B_2,B_3,C_1,C_2,C_3$，但先當成 A,A,A,B,B,B,C,C,C 在排序，如條件要求就是要排成 $A\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta C$ 的順序,而且由前三個條件能得到如下結果：

A 國的人之後不能排 A 國的人，B 國的人之後不能排 B 國的人，C 國的人之後不能排 C 國的人。

現在先將 AAA 排入，再排 BBB,CCC，會形如 $A\Delta_1A\Delta_2A\Delta_3$，其中 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3$ 等區域裡面只能出現 B 或 C 且 Δ_3 區域最後一定至少有一個 C。

(2) 排 BBB 進去的可能情形如下：

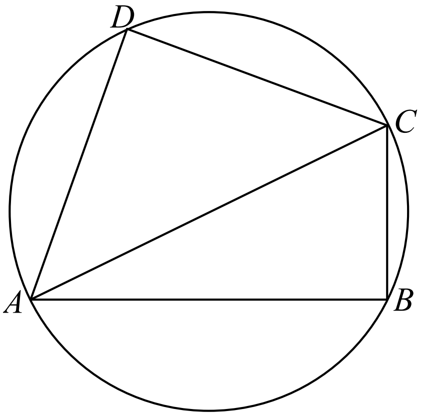
BBB 排法類型	CCC 排入方法數 (最後為 C)
$ABBBA\Delta_2A\Delta_3$	0 種
$A\Delta_1ABBBA\Delta_3$	0 種
$A\Delta_1A\Delta_2ABBB$	0 種
$ABBABA\Delta_3$	4 種
$ABBA\Delta_2AB$	1種
$ABABBA\Delta_3$	4 種
$A\Delta_1ABBAB$	1種
$ABA\Delta_2ABB$	1種
$A\Delta_1ABABB$	1種
$ABABAB$	10 種
總計	22 種

故總共有 22 種排法，

(3) 再考慮將 A,A,A,B,B,B,C,C,C 等當成不同的九個人，則有 $22\times(3!)^3=22\times6^3=4752$ 種方法數。

問題編號 7202

已知ΔADC 爲圓內接等腰直角三角形，$\angle ADC$=90°，　，B 在圓周上。如圖，若 $\overline{AB}+\overline{BC}$=12，則 $\overline{BD}$=？



参考解答：

在 $\overrightarrow{BC}$ 上取一點 E，使 $\overline{CE}=\overline{AB}$，連 $\overline{DE}$ 、$\overline{BD}$

$\because\ \angle 4 + \angle 6 = 180° = \angle 5 + \angle 6$

$\therefore \angle 4 = \angle 5$　　已知 $\overline{DA}=\overline{DC}$

$\therefore \Delta DAB \cong \Delta DCE\ (SAS)$

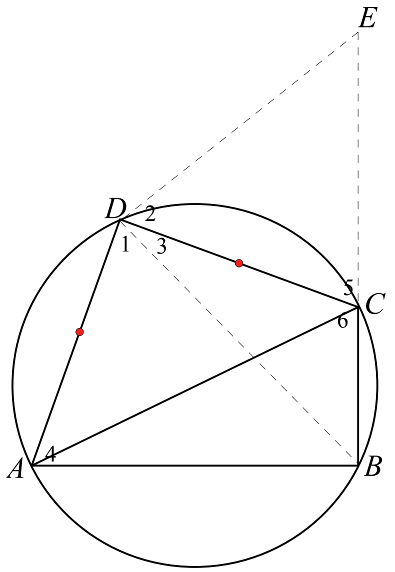
$\therefore\ \overline{BD}=\overline{ED}$，$\angle 1 = \angle 2$

$\therefore 12 = \overline{AB}+\overline{BC}=\overline{CE}+\overline{BC}=\overline{BE}$

$\because\ \angle EDB=\angle 2+\angle 3 =\angle 1+\angle 3=90°$

$\therefore \Delta EDB$ 是等腰直角三角形

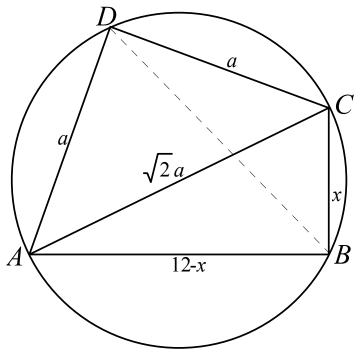
$\therefore\ \overline{BD}=\overline{DE}=\dfrac{\overline{BE}}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$



另證：如圖所設，由托勒密定理知：

$a(12-x)+a\cdot x = \sqrt{2}\,a\cdot \overline{BD}$

$\Rightarrow \overline{BD}=\dfrac{12}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$

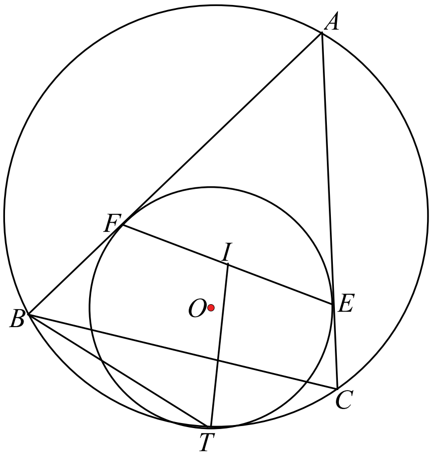


解題評註：

這是一個測試旋轉變換的問題，以 D 爲軸心，將ΔDAC 正向旋轉 90°至ΔDCE，接著由畢氏定理即可解得 $\overline{BD}$之長，如上述第一種方法。或者，利用圓內接四邊形之托勒密定理，是一個更快速的途徑，如上述第二種方法。

問題編號
7203

如圖，已知ΔABC 與圓 O 相切於 E、F，圓 O 與ΔABC 的外接圓相切於 T，若 $\overline{EF}$ 中點　爲 I，試證：$\overline{IT}$ 平分$\angle BTC$



參考解答：

連接 $\overline{OA}$、$\overline{OC}$、$\overline{OI}$、$\overline{OF}$、$\overline{OT}$，則$\angle 1 = \angle 2$，$\overline{IE} = \overline{IF}$

$\Rightarrow \overline{OT}^2 = \overline{OF}^2 = \overline{OI} \cdot \overline{OA}$

$\Rightarrow \overline{OI} : \overline{OT} = \overline{OT} : \overline{OA}$

$\therefore \Delta OTI \cong \Delta OAT$ (SAS 相似)

$\therefore \angle 3 = \angle 4$。過 T 作兩圓之公切線，

則$\angle CTS = \angle 2 - \angle 4$

$\because \angle OTS = \angle OTI + \angle ITC + \angle CTS = 90°$

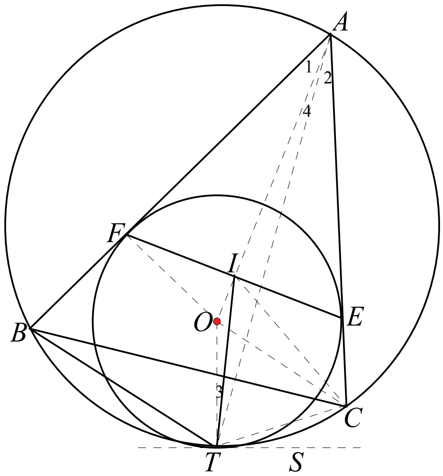
$\therefore \angle ITC = 90° - (\angle 3 + \angle CTS)$

$= 90° - [\angle 4 + (\angle 2 - \angle 4)]$，

$= 90° - \angle 2 = 90° - \dfrac{1}{2}\angle CAB$

同理 $\angle BTI = 90° - \dfrac{1}{2}\angle CBA = \angle CTI$

$\therefore$ $\overline{IT}$ 平分$\angle BTC$



解題評註：

本題的解決方法，結合了相似形與圓之切線性質，詳解如上述，供各位參考。

問題編號
7204

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & \cdots & 2006 & & 2007 & & 2008 & & 2009 \\
& 3 & & 5 & & 7 & & \cdots & & 4013 & & 4015 & & 4017 & \\
& & 8 & & 12 & & & \cdots & & & 8028 & & 8032 & & \\
& & & 20 & & & & \cdots & & & & 16060 & & & \\
& & & & \ddots & & & \cdots & & & \iddots & & & & \\
& & & & & \ddots & & \cdots & & \iddots & & & & & \\
& & & & & & & K & & & & & & &
\end{array}$$

已知一個排列如三角形狀的數列如上所示：其中第一列各數依次爲 1, 2, 3, ⋯, 2009。

從第二列起，每個數分別爲上一列的左與右兩數的和。求此三角形最下方的數字 K=?

參考解答：

顯然此三角形數共有 2009 列。

假設第 n 列的最左邊的數爲 a_n，即 $a_1=1, a_2=3, a_3=8, \cdots, a_{2009}=K$

又從第 n 列的最左邊開始第二個數爲 a_n+2^{n-1}，其中 $n=2,3,4,\cdots,2009$

因此 $a_n=a_{n-1}+(a_{n-1}+2^{n-2})$，其中 $n=2,3,4,\cdots,2009$

將上式同除以 2^n：$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{4}$，其中 $n=2,3,4,\cdots,2009$，可得下面式子

$$\cancel{\frac{a_2}{2^2}}=\frac{a_1}{2^1}+\frac{1}{4}$$

$$\cancel{\frac{a_3}{2^3}}=\cancel{\frac{a_2}{2^2}}+\frac{1}{4}$$

$$\cancel{\frac{a_4}{2^4}}=\cancel{\frac{a_3}{2^3}}+\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{2009}}{2^{2009}}=\cancel{\frac{a_{2008}}{2^{2008}}}+\frac{1}{4}$$

將以上所有各式相加：$\dfrac{a_{2009}}{2^{2009}}=\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{1}{4}\times 2008$

將 $a_1=1$ 代入上式：$a_{2009}=2^{2007}\times 2010$

解題評註：

本題在於如何觀察數列並找出規則。每個人的切入點均不同，所以解法不唯一，只要找出規則後加以驗證即可。另外，如何有條理將過程描述出來，便是日後要多練習之處。

問題編號 7205

已知

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2^2-1^2}+\dfrac{y^2}{2^2-3^2}+\dfrac{z^2}{2^2-5^2}+\dfrac{w^2}{2^2-7^2}=1\\ \dfrac{x^2}{4^2-1^2}+\dfrac{y^2}{4^2-3^2}+\dfrac{z^2}{4^2-5^2}+\dfrac{w^2}{4^2-7^2}=1\\ \dfrac{x^2}{6^2-1^2}+\dfrac{y^2}{6^2-3^2}+\dfrac{z^2}{6^2-5^2}+\dfrac{w^2}{6^2-7^2}=1\\ \dfrac{x^2}{8^2-1^2}+\dfrac{y^2}{8^2-3^2}+\dfrac{z^2}{8^2-5^2}+\dfrac{w^2}{8^2-7^2}=1\end{cases}$$

試求出 $x^2+y^2+z^2+w^2=?$

參考解答：

由於對解方程式的瞭解，應該可以感覺出對於 t 之方程式

$\dfrac{x^2}{t-1}+\dfrac{y^2}{t-9}+\dfrac{z^2}{t-25}+\dfrac{w^2}{t-49}=1$明顯有 t＝4、16、36、49 之解

同時乘 $(t-4)(t-9)(t-16)(t-49)$ 去分母，可以得到

$$(t-4)(t-9)(t-16)(t-49)-x^2(t-9)(t-16)(t-49)-$$

$$y^2(t-4)(t-16)(t-49)-z^2(t-4)(t-9)(t-49)-w^2(t-4)(t-9)(t-16)=0$$

而關於 t 之四次方程式，明顯有 t＝4、16、36、49 之解

所以上式與 $(t-4)(t-9)(t-16)(t-49)=0$ 等價，二式之係數應滿足對應項成比例，而 t^3 項之係數

$$-1-9-25-49-x^2-y^2-z^2-w^2=-4-16-36-64$$

$$x^2+y^2+z^2+w^2=36$$

解題評註：

解題過程巧妙地將文字 x^2,y^2,z^2,w^2 視爲已知數，而將 $2^2,4^2,6^2,8^2$ 的位置視爲未知數，再利用根與係數的關係。考驗同學們對未知數、已知數的敏感度。