怎麼做怎麼對
--99 數學學測一題多解之實例

陳昭地

國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

99 大考數學學測前二天，我接到大考中心邀請參與數學學測試題解答討論會，一月二十九日數學學測之後就接到大考中心電子傳真 20 道考題，當晚就花了一些時間瀏覽思考這份試卷，隔天一早到大考中心參加爲時超過 3 小時的討論會。很巧地發現其中一道選填題（G 題）屬於超多樣解答方式可得到的邊長關係式，且此關係式恰好落在筆者近年來經常應用來數學教師研習會的講義或專著內（[1]、[2]、[3]、[4]）。本文旨在提出九解法，其中前五種是綜合幾何解法，國中生學過三年幾何就能做得出來；另外最後五種三角法，計算量較大，學過高中三角之後，就應能解出來，顯然是 99 學測數學命題小組（含顧問、試考生）配合 95 課綱三角函數內容認爲合適試題的主要原由！

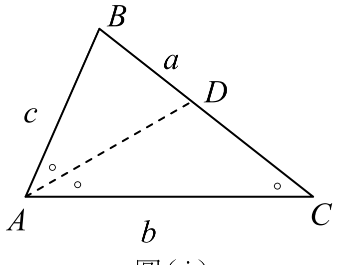
貳、99 數學學測選填題 G 之內容與解法舉例

今年數學學測選填題 G 之內容如下：

已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=3$ 且 $\angle A=2\angle C$，則 $\overline{AC}=\dfrac{㉘}{㉙}$（化爲最簡分數）

由於我知道這樣的三角形，其邊長關係必符合 $a^2=c(b+c)$，以 $c=2$，$a=3$ 直接代入可得 $b=\dfrac{5}{2}$ 即 $\overline{AC}=\dfrac{5}{2}$ 完全正確的答案！以 5 秒鐘內就能完全正確解出原本設計成中偏難的題目。當然前提仍在於善用有 2 倍角關係的三角形，其邊長關係公式應該是存在的！不僅如此其關係式竟然如此簡潔易記呢！底下用十種方法來解說這個關係公式，提供數學教學的參考。

解法（一）：如圖（i）



圖（i）

作 $\angle A$ 的平分線 $\overline{AD}$，則

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle A=\angle C$$

$\therefore \Delta ABD \sim \Delta CBA$（AA 相似）

$$\therefore \overline{AB}:\overline{CB}=\overline{BD}:\overline{BA}$$

$$\therefore \frac{c}{a}=\frac{\overline{BD}}{c}$$

$\therefore c^2 = a \times (\overline{BD})$

但 $\overline{BD} : \overline{DC} = c : b$（角平分線性質）

$\therefore \overline{BD} = \dfrac{ca}{b+c}$

$\therefore c^2 = a \times \dfrac{ac}{b+c}$

$\therefore a^2 = c(b+c)$

解法（二）：如圖（i）

$\Delta ABD \sim \Delta CBA$

$\therefore \overline{AB} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{CA}$

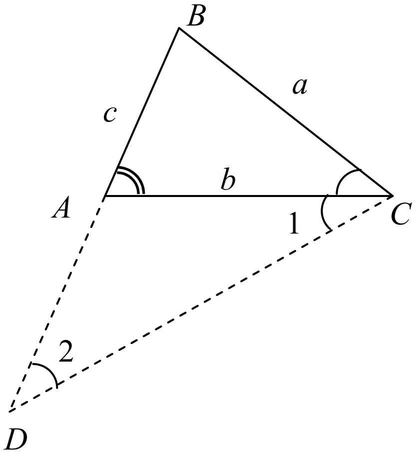
$\therefore \overline{AB} : \overline{CD} = \overline{BC} : \overline{CA}$

$\therefore \dfrac{c}{\overline{CD}} = \dfrac{a}{b}$

$\therefore c = \dfrac{a}{b} \times \overline{CD} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{ab}{b+c}$

$\therefore a^2 = c(b+c)$

解法（三）：如圖（ii）



圖(ii)

延長 $\overline{BA}$ 到 D 使 $\overline{AD} = \overline{AC} = b$

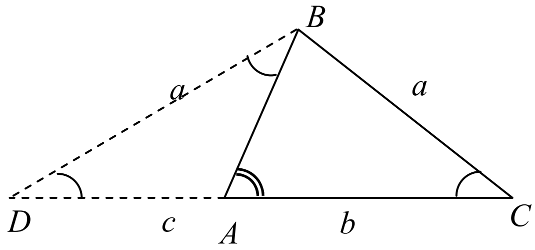
連接 $\overline{CD}$，則 $\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle A = \angle C$

$\Delta ABC \sim \Delta CBD$（AA 相似）

$\therefore \overline{BC} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{BC}$

$\therefore a^2 = c \times \overline{BD} = c(b+c)$

解法（四）：如圖（iii）



圖（iii）

延長 $\overline{CA}$ 到 D 使 $\overline{AD} = \overline{AB} = c$

則 $\angle D = \angle ABD = \dfrac{1}{2}\angle A = \angle C$

$\therefore \overline{BD} = \overline{BC} = a$

$\Delta ABD \propto \Delta BCD$（AA 相似）

$\therefore \overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{CD}$

即 $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a}{b+c} \Leftrightarrow a^2 = c(b+c)$

解法（五）：如圖（iii）

ΔCBD 中，$\angle ABD = \angle C$

故 $\overline{BD}$ 爲 ΔABC 外接圓過 D 的切線

$\therefore \overline{DB}^2 = \overline{DA} \times \overline{DC}$（圓冪定理）

$\therefore a^2 = c(b+c)$

解法（六）：參考圖（i）

設 $\angle C=\theta$，則 $\angle A=2\theta$

由正弦定律知 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin 2\theta}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}$

即 $a=c\times\dfrac{\sin 2\theta}{\sin\theta}=2c\cos\theta$ ....(*)

再由餘弦定律

$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ....(**)

(**)代入(*)得

$a=2c\times\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

即

$a^2b=a^2c+b^2c-c^3\Leftrightarrow a^2(b-c)=c(b^2-c^2)$

當 $b\neq c$ 時，得 $a^2=c(b+c)$

而在 $b=c$ 時，則可知

$4\angle C=180°\Rightarrow\angle C=45°$

$\therefore\angle A=90°$，$\angle B=45°$，

此時 ΔABC 爲等腰直角三角形，

$\Rightarrow a^2=2b^2=c(b+c)$

註：

由(*)得知 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$，再由投影定律

$b=a\cos\theta+c\cos 2\theta$

$=3\cos\theta+2\cos 2\theta=\dfrac{5}{2}$

解法（七）：參考圖(i)

設 $\angle C=\theta$，則 $\angle A=2\theta$，

$\angle B=\pi-3\theta$，利用正弦定律：

$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（外接圓直徑）.......◎

得 $a=2R\sin 2\theta$

$b=2R\sin(\pi-3\theta)=2R\sin 3\theta$

$\mathrm{c}=2\mathrm{R}\sin\theta$

$\therefore a^2=4R^2\sin^2 2\theta$ ....(*)

$c(b+c)=4R^2\sin\theta(\sin\theta+\sin 3\theta)$

$=4R^2\sin\theta(2\sin 2\theta\cos\theta)$ (和角公式)

$=4R^2(\sin 2\theta)\,2\sin\theta\cos\theta$

$=4R^2\sin^2 2\theta$ ....(**)

$\therefore a^2=c(b+c)$

註：由◎知 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ 且

$b=\dfrac{2}{\sin\theta}\sin B=\dfrac{2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)}{\sin\theta}$

$=2(3-4\sin^2\theta)$

$=\dfrac{5}{2}$

解法（八）：由解法（七）(*)：

$a^2=4R^2\cdot(2\sin\theta\cos\theta)^2$

$=16R^2\sin^2\theta\cos^2\theta$

而 $c(b+c)=4R^2\sin\theta(\sin\theta+\sin 3\theta)$

$=4R^2\sin\theta(\sin\theta+3\sin\theta-4\sin^3\theta)$

（三倍角公式）

$=16R^2\sin\theta(\sin\theta-\sin^3\theta)$

$=16R^2\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$

$=16R^2\sin^2\theta\cos^2\theta$

故得 $a^2=c(b+c)$

解法（九）：如圖(i)：令 $\angle C=\theta$，則

$\angle A=2\theta$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$=b^2+c^2-2bc\cos 2\theta$

$=c^2+b(b-2c\cos 2\theta)$

$=c^2+b(a\cos\theta+c\cos 2\theta-2c\cos 2\theta)$

（投影定律）

$=c^2+b(a\cos\theta-c\cos 2\theta)$

$=c^2+b(2R\sin 2\theta\cos\theta-2R\sin\theta\cos 2\theta)$

（定弦定律）

$=c^2+b\left[2R(\sin 2\theta\cos\theta-\cos 2\theta\sin\theta)\right]$

$=c^2+b\times 2R\sin(2\theta-\theta)$

$=c^2+b\times 2R\sin\theta$

$=c^2+b\times c$

$=c(b+c)$

討論（解法十）：

在後四個解法中，若以 $c=2$， $a=3$的實例代入來解 b，計算量仍然不算少；若以利用圖(i)中 $\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a=3$ 兩邊上的投影性質可列出

$$\begin{cases} b=2\cos 2\theta+3\cos\theta \\ 3=b\cos\theta+2\cos(\pi-3\theta) \\ \quad =b\cos\theta-2\cos 3\theta \end{cases}$$

(其中 $\angle C=\theta$)

消去 b，可得

$4\cos^3\theta-3\cos^2\theta-4\cos\theta+3=0$

即得　$(4\cos\theta-3)(\cos^2\theta-1)=0$

故知 $\cos\theta=\dfrac{3}{4}$ $(\cos\theta\neq\pm 1)$

因此 $b=2\cos 2\theta+3\cos\theta=\dfrac{5}{2}$

如此的計算量就大了些。

反之，想想幾個特例：

(1) $\angle C=30°$， $\angle A=60°$則 ΔABC 爲直角三角形，其邊長比易知

$a:b:c=\sqrt{3}:2:1$………(✧)。

(2) 想 $\angle C=45°$，$\angle A=90°$，則 ΔABC 爲等腰直角三角形，其邊長比

$a:b:c=\sqrt{2}:1:1$……….(✧✧)

由(✧)及(✧✧)顯見 a, b, c 符合 $a^2=c(b+c)$；事實上學過國中幾何的經驗，經由實際作圖，大概也可以窺出這樣的三角形之三邊長隱含著這個密切的等式！

參、結論

一題多解的問題配合，特別是多於 3 個解法時，常會被引用數學解題一題多解的實例。（[1]、[2]、[3]），很有可能會出現在不同的場合，尤其結論又是一個很簡易的公式！這樣的問題出現在數學學測中的選塡題，配合課綱會誤導考生用計算量大的方式解答而易生錯誤的答案，顯然心中存有 $a^2=c(b+c)$的考生而言具有絕對的優勢，而無法真正測出考生的能力，這樣的考法，顯然有失公允，非常不適當；即便改爲證明題，這麼多的解法，顯然無法達到考題的測驗目標（[4]）。頂多用它來作訓練一題多解的好例題而已！最後特別提醒讀者 a、b、c 既然爲三角形的三邊長，它們之間必然有任二邊長之和大於第三邊，甚至本題中的 a, c 必符合 $c<a<2c$（見解答（六）*式），因此若改命成

$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=4$，這樣的三角形是不存在；教師在引用這題設計成新考題時務必特別小心呢！假設考卷上正、餘弦定律的公式不給出來的話，從以上的討論及解法，若將本選填題 G 中「求 $\overline{AC}$ 」長，改成爲「求 $\cos C$ 」或「求 $\cos A$ 」或「求 $\cos B$ 」都可改進原先命題的缺失進而可達測驗目標呢！

肆、參考資料

陳昭地（民 98），數學資優生輔導理論與實例，未出版（講義）

陳昭地、林礽堂、李虎雄等（民 89），幾何學上冊，康熙圖書有限公司出版。

陳昭地、李政貴、徐正梅等（民 87），通訊解題輔導數學資優生並培養競賽能力之研究，（NSC-86-2511~S003-038, 87-2511~S-003-025）台師大科教中心出版；建中數學學科中心網址：http://mathcenter.ck.tp.edu.tw。

陳昭地（民 98），數學命題技術探討與實例，康熹數學報報 11 月號出版，http://www.knsi.com.tw。