中學生通訊解題第七十一期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
7101

已知一遞增數列 $\{a_1, a_2, a_3, ...\} = \{1,3,3,3,5,5,5,5,5,......\}$，每一項皆爲奇數，且奇數 k 重覆 k 次，試求第 2009 項 a_{2009} 之值。

參考解答：

$1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$

又 $n^2<2009$ 即 $n<45$

取 $m=45$ **即符合所求。**

故 $a_{2009}=2m-1=2\times 45-1=89$

而當 y=1 時，$\dfrac{1}{y}$ 的最大值爲 1。

【一般項作法】

設 $a_n=2m+1$

則

$1+3+5+...+(2m-1)+1\le n\le 1+3+5+...+(2m+1)$

$\Rightarrow m^2+1\le n\le (m+1)^2$

$\Rightarrow \sqrt{n}-1\le m\le \sqrt{n-1}$

$\Rightarrow \sqrt{n-1}-1<m\le \sqrt{n-1} \Rightarrow m=[\sqrt{n-1}]$

$\Rightarrow a_n=2m+1=2[\sqrt{n-1}]+1$

其中 [ ] 表示高斯記號 (整數記號)

(設 n 爲整數，當 $n\le x<n+1$ 時，則 $[x]=n$ ，n 爲不大於 x 之最大整數。

例如 [2.8]=2，[3.1]＝3)

故 $a_{2009}=2\times 44+1=89$

解題評註：

本題屬於簡易的數論問題，如果能充分運用求和公式可以適度簡化計算過程。此次共有 12 位同學參與此題徵答,所有學生均能將解答順利求出。許多同學能提出許多不同的創意解法,例如運用等差求和公式。

問題編號
7102

依次將正整數 1,2,3,…的平方數排成一串：排在第 1 個位置的數字是 1，排在第 5 個位置的數字是 6，排在第 10 個位置的數字是 4，排在第 2009 個位置的數字是？

參考解答：

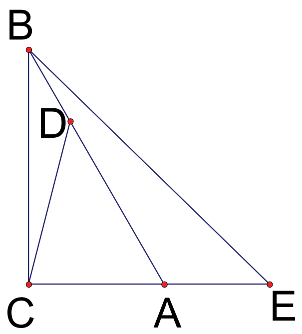
正整數的平方	幾位數	共佔___個位置
1^2 到 3^2	1	$1\times3=3$
4^2 到 9^2	2	$2\times6=12$
10^2 到 31^2	3	$3\times22=66$
32^2 到 99^2	4	$4\times68=272$
100^2 到 316^2	5	$5\times217=1085$
317^2 到 411^2	6	$6\times95=570$

解題評註：

運用正整數的平方的運算，個數的累計，即可解出此題。

問題編號
7103

如圖所示，在 ΔABC 中，$\angle ACB=90°,\angle BAC=60°$，在 $\overline{AB}$ 內取一點 D，在 $\overline{CA}$ 的延長線上取一點 E，使得 $\overline{AC}\times\overline{CE}+\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}^2$。已知 $\overline{CD}=1$，則 $\overline{BE}=?$



參考解答：

$$\overline{AC}\times\overline{CE}+\overline{AB}\times\overline{BD}=\overline{BC}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}\times\overline{CE}+\overline{AB}\times\overline{BD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BC}\times\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AC}}\times\overline{CE}+\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\times\overline{BD}=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\times\overline{BC}$$

$$\Rightarrow \overline{CE}+2\times\overline{BD}=\sqrt{3}\times\overline{BC}$$

在 $\overline{CE}$ 的延長線上取一點 F，

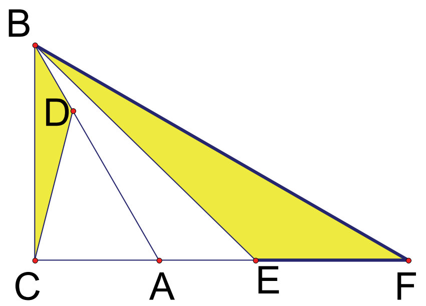
使得 $\overline{CF}=\overline{CE}+2\times\overline{BD}=\sqrt{3}\times\overline{BC}$

顯然

$\angle BFE=30°$、$\overline{BC}:\overline{BF}=1:2$、$\overline{BD}:\overline{EF}=1:2$

即 $\Delta CBD\sim\Delta BFE$，因此 $\overline{CD}:\overline{BE}=1:2$，

又 $\overline{CD}=1$，所以 $\overline{BE}=2$



解題評註：

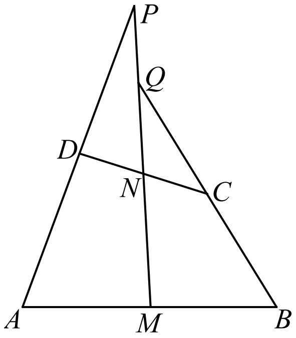
本題屬幾何問題，大部分的徵答作法均使用代數方式（利用畢式定理或餘弦定理）解出。但建議盡量朝幾何的方法（如三角形相似原理）思考，多養成幾何方面的解題能力。

從徵答的 7 位同學中，僅有台中市林同學嘗試從幾何的角度切入，相當難得。建議

對幾何類的問題，盡量以幾何的角度思考與欣賞，對數學能力的養成將有很好的靳獲。

問題編號
7104

如圖所示，$\angle APM=\angle BQM$，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 之中點分別為 M、N，試證：$\overline{AD}=\overline{BC}$



參考解答：

連 $\overline{BD}$ 取其中點 T，連 $\overline{TM}$ 、$\overline{TN}$ ，

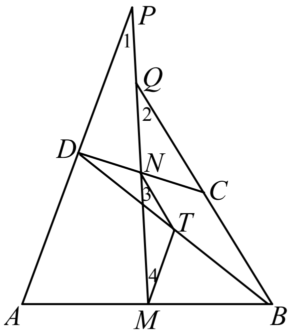
$\because$ $\overline{AB}$ 、$\overline{CD}$ 之中點分別為 M、N

$\therefore$ $\overline{TN}\,//\,\overline{BC}$， $\overline{TM}\,//\,\overline{AD}$

$\therefore$ $\angle 1=\angle 4$，$\angle 3=\angle 2$

已知 $\angle 1=\angle 2 \Rightarrow \angle 3=\angle 4$

$\therefore$ $\frac{1}{2}\overline{BC}=\overline{TN}=\overline{TM}=\frac{1}{2}\overline{AD}$



解題評註：

本題是一個多種解法的問，可從坐標法、旋轉變換、孟氏定理、….，其中，利用平行線的性質是一個較快速的途徑，如上述詳解。