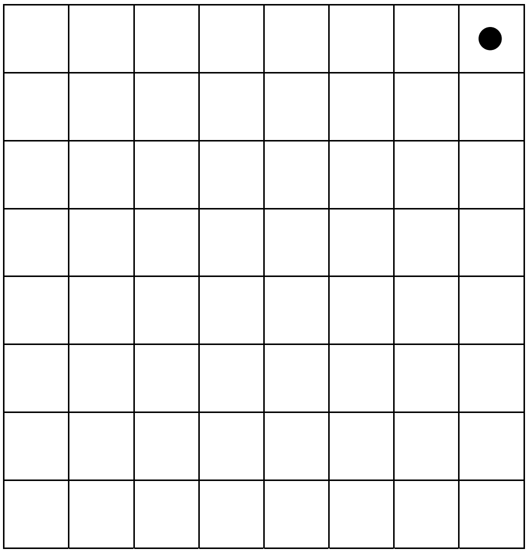
中學生通訊解題第七十期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
7001

如圖在 8×8 方格紙右上角的方格內放一個黑色棋子，以後每次可在表中的任何一個空格中放置一個白色棋子，並且改變已放在相鄰方格(有共同頂點的方格)中棋子的顏色(白改黑、黑改白)。問是否能使全部方格上都變成白色棋子，試證明你的推論。



參考解答：

【方法一】

不能。每次在一個空格中放置一個棋子時，就用線段將該方格的中心與相鄰的空格的中心連接起來(若有空格存在時)，則最後的結果是除了右上角的方格為參與連線之外，其他的每兩個相鄰方格的中心都恰好連有一條線段，從而所連的線段總數為奇數。所以連線過程中必有某一個方格放入白色棋子時出現奇數條線段，也就是它有奇數個相鄰方格。因此，在改變顏色之後，這個方格中的棋子是黑色的。

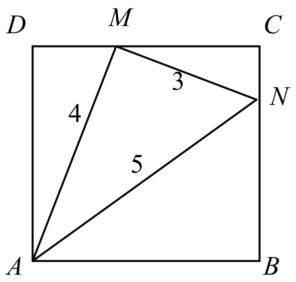
【方法二】

不能。如果最後結果是所有方格中都是白色棋子，則因為放入時除一個黑色棋子外都是白色棋子，故總共改變顏色的次數(一個方格中的棋子改變一次顏色算一次)為奇數。

另一方面，方格表內每個點是四個頂點的公共頂點，組成兩對斜相鄰的方格，在放入棋子的過程中恰發生兩次顏色改變。方格表內部每條邊(方格的邊)恰是一對相鄰方格的公共邊，恰發生一次顏色改變。由對稱性知發生顏色改變的總次數為偶數，矛盾。所以不會出現所有方格中都放有白色棋子的結果。

問題編號
7002

如圖，有一個正方形內接一個邊長為 3、4、5 的三角形，那麼這個正方形的面積為多少？



參考解答：

設 $\overline{DA}=a$，$\overline{DM}=x$，因為 $\Delta AMD \sim \Delta MNC$，

得 $\overline{DA}:\overline{MA}=\overline{CM}:\overline{NM}$，

即 $a:4=(a-x):3$，所以 $a=4x$。

由商高定理知 $(4x)^2+x^2=4^2$，

解得 $x^2=\dfrac{16}{17}$，因此正方形 $ABCD$ 面積

$a^2=16\,x^2$ 即等於 $\dfrac{256}{17}$

解題評註：

由於前幾屆有關幾何方面的題目較艱澀，這次老師以鼓勵的角度，希望大家多多參與通訊解題，果然來信的同學非常踴躍且都答對了，冀望以後大家多多動腦，一起欣賞數學之美。

問題編號
7003

已知對於任何正質數 p，我們有下列事實：$(p-1)!+1$ 是 p 的倍數，試求 $2\times(38!+39!+40!+\cdots\cdots+98!)$ 除以 2009 的餘數為何？

（其中對於任何正整數 n 而言，$n!=1\times2\times\cdots\cdots\times n$）

參考解答：

(i) 因為 $2009=7^2\times41$，所以 $2\times(41!+42!+43!+\cdots\cdots+98!)$ 除以 2009 的餘數為 0

(ii) 因為

$2\times(39!+40!)$
$=2\times39!\times(1+40)$，
$=2\times41\times39!$

所以 $2\times(39!+40!)$ 除以 2009 的餘數為 0

(iii)根據(i)及(ii)，要求 $2\times(38!+39!+40!+\cdots\cdots+98!)$ 除以 2009 的餘數，只須求 $2\times38!$ 除以 2009 的餘數。利用(ii)中 $39!+40!$ 是 41 的倍數及題目中的提示 $40!+1$ 是 41 的倍數，所以

$2\times38!=(41-39)\times38!=41\times38!-39!$
$=41\times38!-(39!+40!)+(40!+1)-1=41k-1$

其中 k 為正整數。

(※注意 $2\times38!$ 是 49 的倍數)

(iv)承(iii)，$2\times38!=41k-1=49t$，其中 k,t 為正整數，

$41k-1=49t \Rightarrow 41(k-t)-8t=1$，

易知 $k=6,t=5$ 是其中一解。

若 $(k_1,t_1),(k_2,t_2)$ 為 $41k-1=49t$ 的其

中兩組解，則有下列事實：

$41(k_1-k_2)=49(t_1-t_2)$，

因此 $41k-1=49t$ 的一般解為

$k=6+49i, t=5+41i$，其中 i 為整數。

因此

$2\times 38!=41k-1=41(6+49i)-1$
$=2009i+245$

故

$2\times(38!+39!+40!+\cdots\cdots+98!)$
除以 2009 的餘數為 245。

解題評註：

四位同學們都利用了 $2009=7^2\times 41$ 這個關係，將問題簡化，接下來運用各種不同的方法，來確定它除以 2009 的餘數，其中包含了同餘的概念、因倍數的概念或是輾轉相除法解不定方程的概念，十分值得鼓勵！

問題編號
7004

3 個實數 x, y, z，滿足下列三個等式

$$x+y+z=0$$
$$x^3+y^3+z^3=3$$
$$x^5+y^5+z^5=15$$

試求 $x^2+y^2+z^2$ 的值?

參考解答：

令

$$A=xy+yz+zx,$$
$$B=xyz,$$
$$S_n=x^n+y^n+z^n$$

又因為

$$x^{n+3}+y^{n+3}+z^{n+3}=$$
$$(x+y+z)(x^{n+2}+y^{n+2}+z^{n+2})$$
$$-(xy+yz+xz)(x^{n+1}+y^{n+1}+z^{n+1})$$
$$+xyz(x^n+y^n+z^n)$$

且 $S_{n+3}=-AS_{n+1}+BS_n$

$$S_0=x^0+y^0+z^0=3$$
$$S_1=x+y+z=0$$
$$S_2=x^2+y^2+z^2$$
$$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=-2A$$

故

$$S_3=-AS_1+BS_0=3B=3$$
$$S_4=-AS_2+BS_1=2A^2$$
$$S_5=-AS_3+BS_2=-5AB=15$$

即得

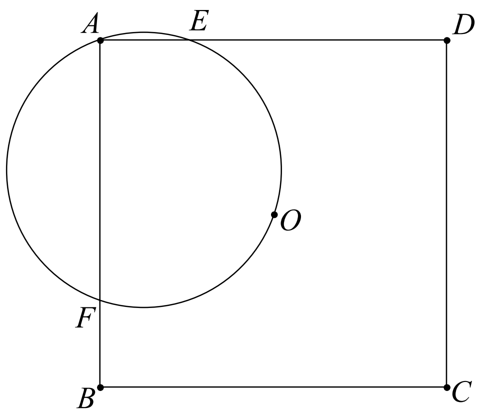
$$B=1, A=-3, S_2=x^2+y^2+z^2=-6$$

解題評註：

本題屬於難度較高的計算問題，如果能充分運用到因式分解式及遞迴數列相關性質，可以適度簡化計算過程。此次共有 14 位同學參與此題徵答，所有學生均能將解答順利求出。許多同學能提出許多不同的創意解法值得肯定，但是相對有多同學在計算過程仍然顯現繁雜，有待精進。

問題編號
7005

如圖，O 為正方形 $ABCD$ 的中心（對角線的交點），一圓過 O、A 兩點，且與 AD 邊、AB 邊分別交於 E、F 兩點。若圓面積與正方形面積的比值為 $\frac{\pi}{6}$，試求 $\overline{AF}$ 與 $\overline{AB}$ 長度的比值。



參考解答：

連 $\overline{OE}$、$\overline{OF}$，則知 $\Delta OAE \cong \Delta OBF$（AAS 全等），可得 $\overline{AE}=\overline{BF}$。

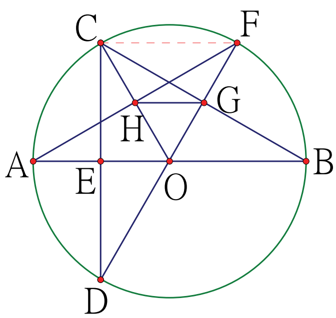
設圓半徑為 r，正方形 $ABCD$ 邊長為 a、$\overline{AF}=x$，所以 $\overline{AE}=a-x$，且知 $x^2+(a-x)^2=(2r)^2$，兩邊同除以 a^2 得 $k^2+(1-k)^2=4(\frac{r^2}{a^2})$，其中 $k=\frac{x}{a}$。因圓面積 πr^2 與正方形面積 a^2 的比值為 $\frac{\pi}{6}$，所以 $\frac{r^2}{a^2}=\frac{1}{6}$，得 $k^2+(1-k)^2=\frac{2}{3}$，即 $6k^2-6k+1=0$，解得 $k=\frac{3\pm\sqrt{3}}{6}$，以原圖比例 $\overline{AF}>\overline{AE}$，故知 $k=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$

解題評註：

本題的設計原意是不需要使用餘弦定理，當然用此定理亦可解出，只是無法看到原意中 $\Delta OAE \cong \Delta OBF$ 所傳達的旋轉變換。另外，因為本題數字設計巧妙，如果觀察出 $\angle OAK=30°$（其中 K 是圓 $OEAF$ 的圓心），也可順利解出。

問題編號
7006

在圓 O 中，弦 $\overline{CD}$ 垂直直徑 $\overline{AB}$ 於點 E，直徑 $\overline{DF}$ 平分 $\overline{BC}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 G，弦 $\overline{AF}$ 交 $\overline{OC}$ 於點 H，則 $\frac{\overline{GH}}{\overline{AB}}$ 的值為？



參考解答：

【方法一】

作 $\overline{CF}$ 。

$\because$弦 $\overline{CD}$ 垂直直徑 $\overline{AB}$

$\therefore \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{AD} \Rightarrow \angle B = \angle AFD$

$\because \overline{OC} = \overline{OB}$

$\therefore \angle B = \angle OCB \quad \Rightarrow \angle AFD = \angle OCB$

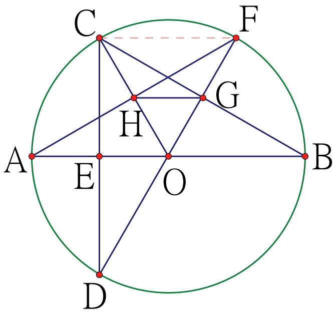
故 C、H、G、F 四點共圓。

因此 $\angle CGH = \angle AFC = \angle B$，

得 $\overline{GH} // \overline{OB}$

又 G 為 $\overline{BC}$ 中點，所以

$$\overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{4}\overline{AB} \Rightarrow \frac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$$



【方法二】

此題 $\overline{DF}$ 為直徑。

(1) $\because \overline{DF}$ 為直徑 $\therefore \angle DCF$ 為直角，$\overline{CD} \perp \overline{CF}$ 。

(2) $\because \overline{AB} \perp \overline{CD}$ ，$\overline{CD} \perp \overline{CF}$ $\therefore \overline{CF} // \overline{OB}$ ，$\angle GCF = \angle GBO$

又 $\angle CGF = \angle BGO$，$\overline{GC} = \overline{GB}$ ，故 $\triangle GCF \cong \triangle GBO$（ASA），

得 $\overline{CF} = \overline{OB} = \overline{OA}$

(3) $\because \overline{CF} = \overline{OA}$ ，$\overline{CF} // \overline{OA}$

$\therefore$四邊形 $CFOA$ 為平行四邊形，

得 $\overline{AF}$ 平分 $\overline{CO}$ 於 H。

(4) $\because$ G、H 分別為 $\overline{CB}$ 、$\overline{CO}$ 的中點

$$\therefore \overline{GH} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$$

【方法三】台北市敦化國中呂同學的作法，稍作修改。

設 $\angle COF = \angle 2$，$\angle COA = \angle 3$，$\angle FAO = \angle 4$，$\angle GOB = \angle 5$，$\angle GBO = \angle 6$

$\because$直徑 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ ，$\overline{DF}$ 平分 $\overline{BC}$

$\therefore \overline{CE} = \overline{ED}$ ，$\overline{OF} \perp \overline{BC}$

由孟氏（**Menelaus**）定理，在$\triangle CDG$ 中，截線 $E-O-B$，$\frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CB}}{\overline{BG}} \cdot \frac{\overline{GO}}{\overline{OD}} = 1$

$\frac{1}{1} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{\overline{GO}}{\overline{OD}} = 1$，得

$\overline{GO} = \frac{1}{2}\overline{OD} = \frac{1}{2}\overline{OB}$，又 $\angle OGB = 90^0$，

所以 $\angle 5 = 60^0$，$\angle 6 = 30^0$

$\because \quad \angle 4 = \frac{1}{2}\angle 5 = 30^0 = \angle 6$，

$\angle 3 = 2\angle 6 = 60^0 = \angle 5$，$\overline{OA} = \overline{OB}$

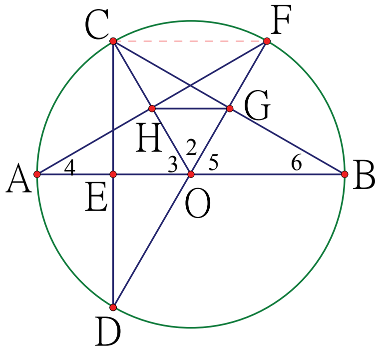
$\therefore \quad \triangle GOB \cong \triangle HOA$(ASA)，$\overline{OH} = \overline{OG}$

又 $\angle 2 = 180^0 - \angle 3 - \angle 5 = 60^0$

$\therefore$ $\triangle HOG$ 爲正$\triangle$

$$\therefore \overline{GH} = \overline{OG} = \frac{1}{2}\overline{OB} = \frac{1}{4}\overline{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{GH}}{\overline{AB}} = \frac{1}{4}$$



解題評註：

1. 參與徵答本題的同學很踴躍，大部分都答對，而且全體中共有數種解法，同學有獨立思考的能力。
2. 解法上應用的數學性質有中垂線性質、四點共圓的條件、對同弧的兩圓周角相等、圓周角爲圓心角的一半、平行四邊形對角線互相平分、平行線的性質、孟氏定理、三角形全等的條件與性質。
3. 以上都是幾何學基礎而重要的性質，同學宜將本題的三種解法再看一看，藉由解題、思考的過程，對於這些性質更有感受。