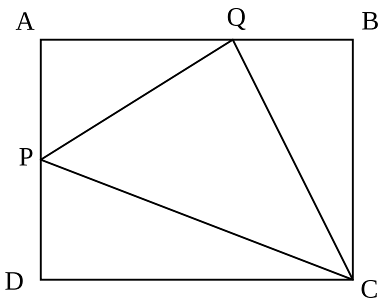
中學生通訊解題第六十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
6901

如圖，矩形 ABCD 中，在 $\overline{AB}$ 上取一點 Q，在 $\overline{AD}$ 上取一點 P，使得△PAQ、△QBC、和△CDP 的面積相等，則 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}=$？



參考解答：

設 $\overline{AQ}=t$, $\overline{QB}=1$, $\overline{AP}=x$, $\overline{PD}=y$

因爲△QBC=△PAQ

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(x+y)=\frac{1}{2}\cdot t\cdot x$$
$$\Rightarrow x+y=tx$$
$$\Rightarrow x:y=1:(t-1)$$

可設 $x=k$, $y=(t-1)k$；($k\neq 0$)

又△PAQ=△CDP

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot t=\frac{1}{2}\cdot y\cdot(t+1)\Rightarrow tk=(t-1)(t+1)k$$
$$\Rightarrow t=t^2-1\Rightarrow t^2-t-1=0$$
$$\Rightarrow t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\ (\text{負不合})$$

故 $\dfrac{\overline{AQ}}{\overline{QB}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

解題評註：
本題屬於初等代數的計算問題，只要適當地假設未知數,應可將解答順利求出。

問題編號
6902

小明在美國中學數學測驗中的得分在 80 分以上，他把分數告訴了小華，小華能正確地推算出小明解答對幾道題，如果小明的得分少一些，但還在 80 分以上，小華就無法推算了。問小明得了多少分？

註：這次測驗有 30 個選擇題，計分的公式是 $S=30+4c-w$，其中 S 爲分數，c 是答對題數，w 是答錯題數，允許不答。

參考解答：

已知 $S=30+4c-w>80$。

我們的問題是要找到最小的這樣的 S，與它對應的 c 是唯一的。

(1) 首先注意到，當 c 增加 1，w 增加 4 時，S 的值不變，

但要滿足 $(c+1)+(w+4)\le 30$，即 $c+w\le 25$。

因此當 $c+w\le 25$ 時，對同一個 S，c 的值不能唯一確定，

所以只能有 $c+w\ge 26$，

此時才有可能使 c 唯一確定。

(2) 其次，還應有 $w\le 3$，

否則，若 $w\ge 4$，可使 w 減 4，c 減 1，仍能使 S 不變，

(因為從 $S>80$，$w\ge 4$ 可得 $c\ge 13$，這也是可能的)

於是，為使 S 盡可能地小，

應在 $\begin{cases} c+w\ge 26 \\ w\le 3 \end{cases}$ 的範圍內，盡量減少 c，盡量增大 w。

為此，w 取 3，c 取 23，

此時 $S=30+4\times 23-3=119$，

即小明得了 119 分。

問題編號
6903

已知有一個正整數 M 有 6 個正因數，其中的 5 個正因數的和為 164，試求 M = ？

參考解答：

(i) 若 M 沒有 2 的因數，則 6 個正因數全是奇數，因此其中的 5 個正因數的和必為奇數，與題意不合。

(ii) 根據(i)，M 必有 2 的因數，加上 M 有 6 個正因數，所以 M 可能的形式為 $2^5, 2^2\times p, 2\times p^2$，其中 p 為奇質數。

(1) 若 M = 2^5，則 M 的 6 個正因數和為 $1+2+2^2+2^3+2^4+2^5=63$，與題意不合。

(2) 若 M = $2^2\times p$，則 M 的 6 個正因數和為 $(1+2+2^2)(1+p)=7(1+p)$ 是偶數，加上其中的 5 個正因數的和為 164，所以 M 的第 6 個正因數必為偶數，故 M 的第 6 個正因數可能為 $2,4,2p,4p$。(以下假設 M 的第 6 個正因數為 K)

① 當 K=2 時，
$7(1+p)=164+2=166$，與 p 為奇質數不合。

② 當 K=4 時，
$7(1+p)=164+4=168$，
$p=23\Rightarrow M=92$。

③ 當 K = $2p$ 時，
$7(1+p)=164+2p$，與 p 為奇質數不合。

④ 當 K = $4p$ 時，
$7(1+p)=164+4p$，與 p 為奇質數不合。

故若 M 是 $2^2\times p$ 的形式，唯一的可能為 M = $2^2\times 23=92$。

(3) 若 M = $2\times p^2$，則 M 的 6 個正因數和為

$(1+2)(1+p+p^2)=3(1+p+p^2)$

是奇數，加上其中的 5 個正因數的和為 164，所以 M 的第 6 個正因數必為奇數，故 M 的第 6 個正因數可能為 $1, p, p^2$。(以下假設 M 的第 6

個正因數為 K)

① 當 K=1 時，

$$3(1+p+p^2)=164+1=165$$
$$\Rightarrow p^2+p-54=0$$

，與 p 為奇質數不合。

② 當 K= p 時，

$$3(1+p+p^2)=164+p$$
$$\Rightarrow 3p^2+2p-161=0 \quad ,$$
$$\Rightarrow (3p+23)(p-7)=0$$

則 $p=7 \Rightarrow M=98$。

③ 當 K= p^2 時，

$$3(1+p+p^2)=164+p^2 \quad ,$$
$$\Rightarrow 2p^2+3p-161=0$$

與 p 為奇質數不合。

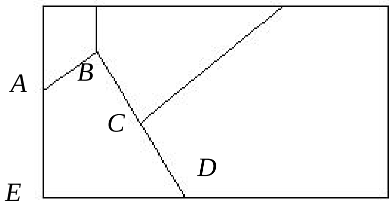
故若 M 是 $2\times p^2$ 的形式，唯一的可能為 M = $2\times 7^2=98$。

綜合(1)、(2)、(3)得 M =92 或 98。

問題編號
6904

某矩形玻璃板碎裂成一些小玻璃片，每塊玻璃片皆為凸多邊形，將其重新黏合成原來的矩形後，共有 22 個交接點，其中 14 個點在原矩形的邊界上(包含原來的 4 個頂點)，其餘 8 個點在矩形內部。在矩形的內部有 40 條黏縫(兩交點間的線段算是一條黏縫)，若只考慮該矩形玻璃板會碎裂成的凸多邊形種類及其分別對應的個數，則會有多少種不同的組合？

註：若凸多邊形的邊界上有 n 個交接點，則將其視為 n 多邊形；如下圖中，B、C、D 三點雖然共線，多邊形 ABCDE 仍然視為五邊形。



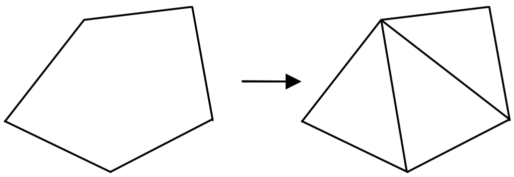
參考解答：

0 種

依題意，所有碎裂多邊形的內角和為

$$4\times 90^\circ+(14-4)\times 180^\circ+8\times 360^\circ$$
$$=5040^\circ$$

將所有多邊形在不增加交點的狀況下，切割成三角形的組合(如下圖)：



因總內角和不變，故最多可切割成

$\dfrac{5040}{180}=28$ 個三角形，其邊數和為 84。

所以內部黏縫個數

$40<\dfrac{84-14}{2}=35$，得到矛盾。

故有 0 種組合滿足題意。

解題評註：

本題除了利用角度和來分析各項條件的合理性之外，亦有同學利用尤拉公式(V – E + F = 2)來進行分析，三位同學的解答都很完整，因此皆得到滿分。