
一篇值得參考的論文

—關於水柱打結的現象

邱義雄

高雄市立前鎮高級中學

壹、前言

在水流量很小且穩定流出的水龍頭下，置一平板（直接用手或其他有平面結構的物體亦可），當平板靠近出水口於某距離內，落下的水流會呈現似波的形狀，而不是筆直落下，即流下的水柱有一節一節的現象（如圖 2-a）。假若平板與出水口的距離再拉近或水流量稍微增多，波紋中的節會變少，且節點的間隔愈長（如圖 4-a 與圖 5-a）。此水柱呈現波形的現象為少流量與近距離效應，所以平板逐漸遠離出水口或水流量增大，則水流的波形漸漸模糊（如圖 3-a 與圖 6-a）甚至消失。

這種現象隨處可見隨手可做，也許不少人在年幼，洗手順便把玩小水柱時，就對此現象產生強烈的好奇，當然這也是莘莘學子們科展常見的題材，且其中不乏得獎的作品。例如 42 屆全國科展高中組物理科，題目「水柱會打結」，獲得最佳團隊合作獎；46 屆高雄市科展高中組物理科，題目「與水共跳肚皮舞－垂直水柱成節機制之探討」，獲得第二名，此作品進而在臺灣 2007 年國際科學展覽會獲得物理科佳作。此外，臺灣 2007 年國際科學展覽會，亦有一件相關作品獲得物理科佳作，題目是「流體碰撞物體所產生的波形之研究及

應用」。甚至連小學生也對這個題材有興趣，41 屆全國科展高小組物理科作品「打結的水柱」獲得佳作。

貳、科展研究的困境與盲點

對於高中生，這個題材所能做的就是改變各種不同的變因，來觀察水柱形成波紋的節點個數，其中可操控的變因為出水口的口徑，出水口到平板的距離，水流流速，水溫等，觀察記錄實驗的結果，並繪出圖表，再加以分析每個變因對節點個數多寡與節長短的影響。也就是說，科展只能做到物理量數據間的關係圖。

若從訓練學生科學實驗的角度來看，這是一個好題材。由於一般大學物理系少有流體力學的課程，加上流體本身的複雜性，所以對於數據分析後的探討，常以高中物理課程學到的「駐波」、「表面張力」或「白努利原理」帶過，無法詳得背後真正的原因，實為美中不足之處。

這個現象不是駐波，因為它完全不符合波動所具備的條件，所以用駐波的觀點去解釋，是說不出個所以然的；至於「表面張力」或「白努利原理」也許有那麼一點關係，可以有一些定性的粗略探究，但是無法圓滿解釋水柱為什麼有節的現象。

在 Jearl Walker 所著的「Flying Circus of Physics with Answers」一書中有提到水柱打結的現象，以「水流裡的駐波」稱之，書中並指出「目前還不知道是否有任何文獻談到這種現象」。(此書在台灣有中譯本，是天下出版的「物理馬戲團」，一套共三冊。)

參、能量函數與變分法

其實在 1995 年，由物理研究學人蔡長青先生，在他的碩士學位論文中，已經指出此現象背後真正的原因。

筆者與蔡先生是同窗好友，對其研究歷程知之甚詳。當時蔡先生的桌子上擺放一堆流體力學、古典理論力學及數學方面的書籍，由一疊紙，一枝筆，加上一顆頭腦，先以理論著手，夜以繼日地思索推演，最後導出一條二階的常微分方程式，此方程式的解與實驗觀察結果相當吻合。

蔡先生的論文中指出，因為打結水柱的問題，其邊界條件、壓力形式與速度分布是未知的，而傳統流體力學是以力的觀點來解決問題的，有其先天的困難，所以捨棄力的觀點，改以能量觀點來考慮。又從漢米爾頓運動原理(Hamilton's principle of motion)的運動態觀點，即動能 T 與位能 V 隨時間演進而互相轉換的啟發，改引用平衡態，即動能位能不隨時間而變化，且依據系統的幾何形狀決定其大小(此處位能為表面張力能)。

當一系統達到動平衡(動能與總能不是時間顯函數)，其分佈於空間的幾何形

狀，必使動能為相對極大，位能為相對極小(或動能與位能的差為極值)。蔡先生認為使用變分法決定靜態液面形狀，早已行之有年，故由 $\delta \int_v (T_d - V_d) dv = 0$ 出發，推導出決定水柱表面形狀的二階常微分方程式

$$RR'' - R'^2 + \frac{R}{\alpha} \left(\frac{1}{2} v_0^2 + gz \right) \left(1 + R'^2 \right)^{\frac{3}{2}} - 1 = 0$$

(摘錄於蔡氏論文 p16)，此方程式採用圓柱坐標，以符合水柱的圓柱對稱(圖 1)。

其中

T_d : 單位體積的動能密度，

V_d : 單位體積的位能密度，

dv : 體積積分元(integral element)

R : 水柱表面橫向坐標

R' : R 對 z 的導數

α : 水的表面張力能

z : 水柱表面縱向坐標

v_0 : $r = R_0$ (R_0 為管內徑)， $z = 0$ 的水流速度，即出水口的流速

g : 重力加速度

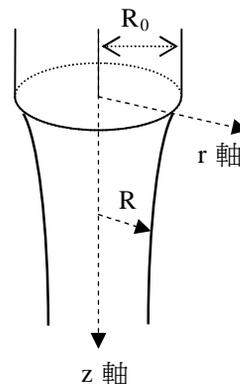


圖 1、水柱的圓柱對稱

接下來以實驗的初始條件值，用套裝軟體 Mathematica，以數值分析方法解出此二階常微分方程式，列出方程式中 R 與 z 的關係，並畫出 R 與 z 的關係圖，得到像打結水柱一樣的曲線，即水柱與空氣的邊界曲線（如圖 2~圖 6，摘錄於蔡氏論文 p20~P24），圖中縱軸為 R ，橫軸為 z ，平板至出水口的距離為 d 。節的個數與節的長度完全與實驗觀察到的相符。

由 Hamilton 運動原理的啓發，蔡先生引進與 Hamilton 運動原理不一樣的觀點。從能量觀點，由動能與位能的差為極值的變分法出發，最終推演出符合實際實驗數據的方程式。簡而言之，水柱會有波紋的原因，是因為一系統在其平衡態時，必會調整本身的幾何形狀，使其動能有極大值，位能有極小值的必然結果。

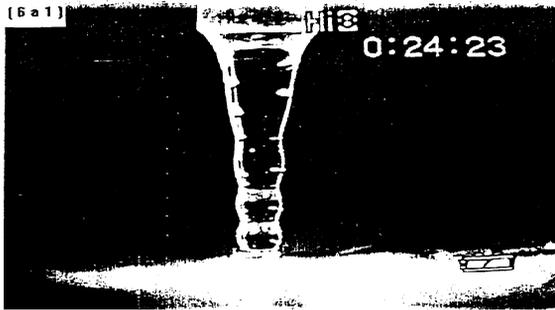


圖 2-a

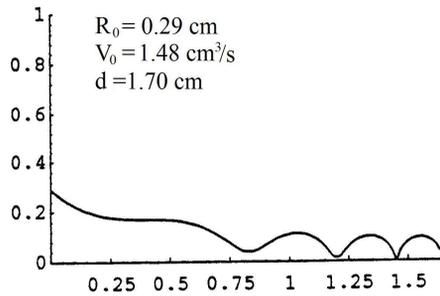


圖 2-b



圖 3-a

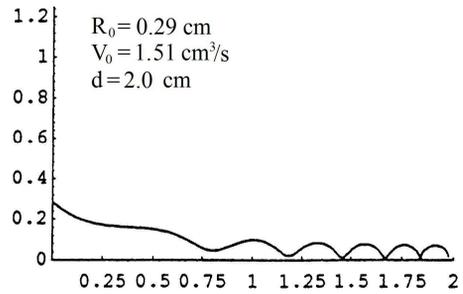


圖 3-b

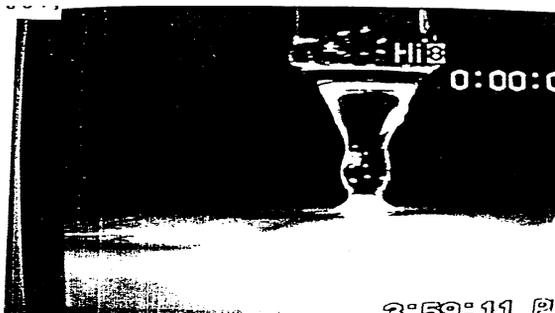


圖 4-a

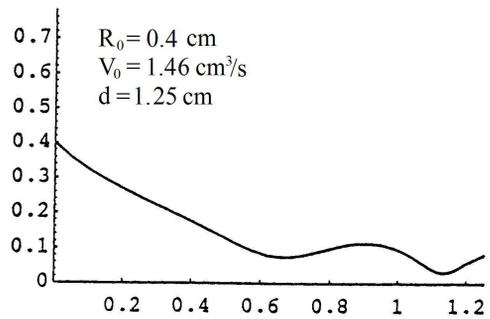


圖 4-b

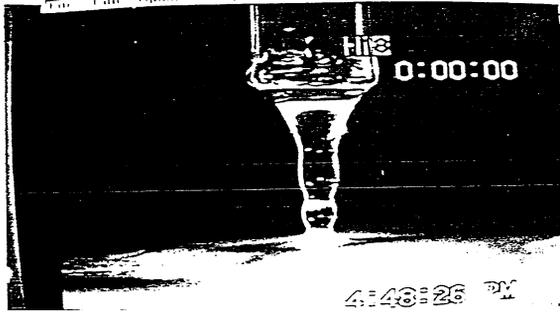


圖 5-a

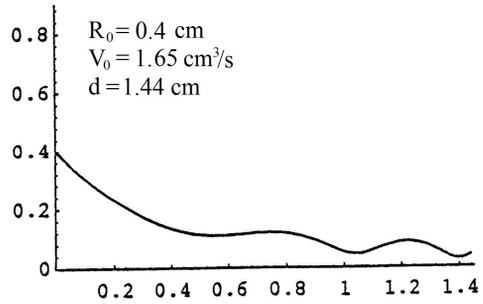


圖 5-b



圖 6-a

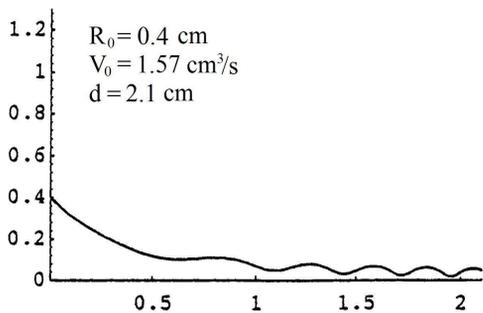


圖 6-b

肆、結論

這篇論文當時曾經交給台灣大學物理系陳義裕教授看過(陳教授專攻流體與非線性物理),陳教授認為整篇論文的推論沒有什麼問題。所以這篇論文是有一定程度的參考價值。

由於此題材是常見的科展主題,因此筆者認為有必要藉由科學教育月刊,向大家推薦這篇值得參考的論文。爾後在訓練學生製作相關科展作品的學習過程中,可以避免不相干的分析探討,而造成學生錯誤的物理觀念,進而讓學生了解到許多複雜的物理現象,其背後深層而簡單的物理意義。

參考文獻

- 蔡長青(1995):落水波形之分析。國立中山大學物理學系碩士論文。
- 葉偉文譯(2000):物理馬戲團 I。台北市:天下遠見。
- 國立臺灣科學教育館:全國中小學科學展覽會歷屆參展資料。取自 <http://www.ntsec.gov.tw/ml.aspx?No=0000262>
- 高雄市政府教育局:46屆〈95年〉高雄市中學科展得獎名單。取自 <http://www.edu.kh.edu.tw/downloads/6/376/381/5263/1149820678558.xls>。
- 國立臺灣科學教育館:臺灣國際科學展覽會 2007 年參展作品。取自 <http://activity.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2007/03.html>

附錄

一、以下是蔡先生的論文摘要：

在決定穩定流的研究上，本論文引進一能量函數，藉著其隨自由邊界變分以滿足動平衡所需之極值條件。為確保其可信性，本文用之以解決落水駐波問題並進而推導決定落水波形之方程式，結果與實驗觀察相當吻合。這說明在統計平衡觀下，用能量處理的方式確為可行。由於此能量函數與 Hamilton 的運動原理十分類似，本文對此亦作一番比較。

二、下表是蔡先生論文中，能量函數與 Hamilton 運動原理的比較：

	Hamilton's principle	蔡氏論文中的平衡式
形式	$\delta \int_t (T - V) dt = 0$	$\delta \int_v (T_d - V_d) dv = 0$
功用	描述運動系統	描述平衡系統
積分對象	系統之個別質點	系統在相空間的點
積分範圍與積分元	時間	空間
適用範圍	系統之 T、V 為時間及空間的函數	系統之 T、V 僅為空間的函數，與時間無關
共通性	皆要滿足其約束方程式	

除了方程式的推導過程之外，此論文的撰述是淺顯易懂的，詳細的論文內容，有興趣的話可以自行參考論文全文。