# 中學生通訊解題第六十八期題目解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

| 問題編號 6801 |
|---|

甲乙二人玩如下的遊戲：

甲從集合$\{1,2,3,4\}$中任取一個數，乙向甲問一連串的問題，其中每個問題都是下述類型:「你所選取的數在不在某個子集中？」，甲只能回答在或不在，而且甲至多只能說一次謊。求證：

(1) 乙只須共提 5 個問題，在得到甲的回答後，便能斷定甲所選定的那個元素；

(2) 為了總能斷定甲所選的數，乙只能提 4 個問題是不夠的。

參考解答：

(1) 乙只須向甲提下列 5 個問題，便可斷定甲所選定的數。

1. 你所選取的數在不在子集$\{1,2\}$中？
2. 你所選取的數在不在子集$\{1,2\}$中？
3. 你所選取的數在不在子集$\{1,3\}$中？
4. 你所選取的數在不在子集$\{1,3\}$中？
5. 你所選取的數在不在子集$\{1,4\}$中？

我們將甲的所有不同回答列表於表一(全沒說謊或只有一題說謊等 6 種情形)，其中文字未加上框線(在或不在)表示未說謊、文字加上框線($\boxed{在}$或$\boxed{不在}$)表示那題回答說謊。可知，表中所列出的甲的 24 組答案互不相同，所以乙可從甲的答案而斷定甲所選的數。

表一：甲回答的 24 組答案互不相同，文字加上框線($\boxed{在}$或$\boxed{不在}$)表示那題回答說謊。

| 甲所選之數 | 問題 1: $\{1,2\}$ | 問題 2: $\{1,2\}$ | 問題 3: $\{1,3\}$ | 問題 4: $\{1,3\}$ | 問題 5: $\{1,4\}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 在 | 在 | 在 | 在 | 在 |
| 1 | $\boxed{不在}$ | 在 | 在 | 在 | 在 |
| 1 | 在 | $\boxed{不在}$ | 在 | 在 | 在 |
| 1 | 在 | 在 | $\boxed{不在}$ | 在 | 在 |
| 1 | 在 | 在 | 在 | $\boxed{不在}$ | 在 |
| 1 | 在 | 在 | 在 | 在 | $\boxed{不在}$ |
| 2 | 在 | 在 | 不在 | 不在 | 不在 |
| 2 | $\boxed{不在}$ | 在 | 不在 | 不在 | 不在 |
| 2 | 在 | $\boxed{不在}$ | 不在 | 不在 | 不在 |
| 2 | 在 | 在 | $\boxed{在}$ | 不在 | 不在 |
| 2 | 在 | 在 | 不在 | $\boxed{在}$ | 不在 |
| 2 | 在 | 在 | 不在 | 不在 | $\boxed{在}$ |

| 甲所選之數 | 問題 1：{1,2} | 問題 2：{1,2} | 問題 3：{1,3} | 問題 4：{1,3} | 問題 5：{1,4} |
|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 不在 | 不在 | 在 | 在 | 不在 |
| 3 | $\boxed{\text{在}}$ | 不在 | 在 | 在 | 不在 |
| 3 | 不在 | $\boxed{\text{在}}$ | 在 | 在 | 不在 |
| 3 | 不在 | 不在 | $\boxed{\text{不在}}$ | 在 | 不在 |
| 3 | 不在 | 不在 | 在 | $\boxed{\text{不在}}$ | 不在 |
| 3 | 不在 | 不在 | 在 | 在 | $\boxed{\text{在}}$ |
| 4 | 不在 | 不在 | 不在 | 不在 | 在 |
| 4 | $\boxed{\text{在}}$ | 不在 | 不在 | 不在 | 在 |
| 4 | 不在 | $\boxed{\text{在}}$ | 不在 | 不在 | 在 |
| 4 | 不在 | 不在 | $\boxed{\text{在}}$ | 不在 | 在 |
| 4 | 不在 | 不在 | 不在 | $\boxed{\text{在}}$ | 在 |
| 4 | 不在 | 不在 | 不在 | 不在 | $\boxed{\text{不在}}$ |

(2) 如果乙只提 4 個問題,由於每個問題的答案只有在和不在兩種,對 4 個問題的所有不同的答案只有 16 種。

另一方面，當甲選定一數時，甲對 4 個問題的答案共有 5 種不同情形(全沒說謊或只有一題說謊等 5 種情形)，所以甲對乙的 4 個問題的回答共有 20 種可能的答案,但乙此時無法確定甲所選定的數。

解題評註：

部分同學以數形圖概念列出對於提出問題後各種可能回答情形，並完整討論，邏輯觀念正確。有些同學符號使用不夠明確，較為可惜。更完整的討論，需要說明只提 4 個問題時，則不能斷定甲所選的數。

| 問題編號 |
|---|
| 6802 |

阿里巴巴試圖潛入山洞，在山洞入口處立著一面鼓，鼓的側面有4個孔，在每個孔的裡面靠近孔口處各裝有一個開關，開關有上和下兩種狀態。如果4個開關的狀態全都一致，洞門即可打開。每回允許將手伸入任意兩個孔，觸摸開關以了解其狀態，並可隨意改變或不改變其狀態。但每當這樣做了之後，鼓就飛快地轉動起來，以至在停轉之後無法確認剛才觸動了哪些開關。現允許重複這種步驟5回(10次)，求證阿里巴巴必能進入山洞。

參考解答：

第 1 回：將一對相鄰開關扳為上。

第 2 回：再將一對相對開關扳為向上，於是 4 個開關中至少有 3 個向上，如果洞門沒有打開，就說明第 4 個開關處於狀態下。

第 3 回：將手伸進相對的兩個孔，如果碰到向下的開關，則把它扳向上方，即可進入山洞；如果碰到兩

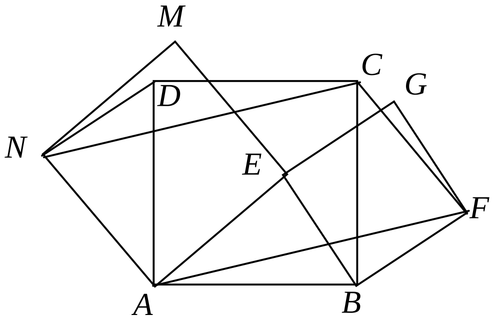
個向上的開關，則把其中之一扳為向下。這樣，4 個開關中兩個相鄰的開關向上，另兩個相鄰的向下。

第 4 回：將手伸進兩個相鄰的孔中，如果遇到的兩個開關狀態相同，他就扳動它們，即可打開洞門；如果遇到的兩個開關狀態不同，則也同時扳動它們。於是 4 個開關中相對兩個狀態相同。

第 5 回：只要將手伸進一對相對孔中扳動開關就可以進洞了。

問題編號
6803

在正方形 $ABCD$ 內任取一點 $E$，連 $\overline{AE},\overline{BE}$，在 $\Delta ABE$ 外分別以 $\overline{AE},\overline{BE}$ 為邊作正方形 $AEMN$ 和 $EBFG$，連 $\overline{NC},\overline{AF}$，證明：$\overline{NC}\,//\,\overline{AF}$。




參考解答：

連 $\overline{ND},\overline{CF}$。

(1) $\because$ $ABCD, AEMN, EBFG$ 均為正方形

$\therefore$ $\angle FBC=\angle EBA, \angle BAE=\angle DAN$，且

$\overline{BF}=\overline{BE}, \overline{BC}=\overline{BA}=\overline{DA}, \overline{AE}=\overline{AN}$

$\therefore$ $\Delta BFC \cong \Delta BEA \cong \Delta DNA$

(2)

$$\therefore\ \begin{array}{l}\overline{FC}=\overline{EA}=\overline{NA},\\ \angle FBC=\angle EBA=\angle NDA,\\ \overline{BF}=\overline{BE}=\overline{ND}\end{array}$$

但 $\Delta NDC$ 與 $\Delta FBA$ 中

$$\because\ \begin{array}{l}\overline{BF}=\overline{NA},\\ \overline{DC}=\overline{AB},\\ \angle NDC=\angle NDA+90^\circ=\angle ABF\end{array}$$

$\therefore$ $\Delta NDC \cong \Delta FBA$

$\therefore$ $\overline{AF}=\overline{CN}$

(3) 由 $\overline{AF}=\overline{CN}, \overline{FC}=\overline{NA}$ 知四邊形 $AFCN$ 是平行四邊形

$\therefore$ $\overline{NC}\,//\,\overline{AF}$

解題評註：

利用三角形全等的概念證明，回答完整，值得鼓勵。但在證明的書寫過程中，若能分段討論，使更容易閱讀，同學將進步更快。

問題編號
6804

已知 $m,n$ 是自然數，對於 $x$ 的方程式 $4x^2-2mx+n=0$ 的兩根都大於 1 且小於 2，試求 $m,n$ 之值＝？

參考解答：

設 $f(x)=4x^2-2mx+n$ 為開口向上的拋物線，其對稱軸 $x=\dfrac{m}{4}$，令 $x_1,x_2$ 為 $f(x)=0$ 的兩根，依題意 $1<x_1,x_2<2$，則 $m,n$ 之值應滿足：

$$1<\frac{m}{4}<2 \qquad \Rightarrow 4<m<8$$

$$f(\frac{m}{4})=-\frac{m^2}{4}+n\le 0 \qquad \Rightarrow m^2\ge 4n$$

$$f(1)=4-2m+n>0 \qquad \Rightarrow 4+n>2m$$

$$f(2)=16-4m+n>0 \qquad \Rightarrow 16+n>4m$$

依次代入後可知：當 $m=6,n=9$ 滿足題意。

解題評註：

解題重點：$f(x)=4x^2-2mx+n$ 為開口向上的拋物線，其對稱軸 $x=\dfrac{m}{4}$，利用方程式的根與係數，以及兩根都大於 1 且小於 2，把 $m,n$ 的範圍一一列出後，可得出 $m=6,n=9$。

問題編號
6805

求最大自然數 $n$，使得 $4^{2009}+4^{2008}+4^n$ 是完全平方數。

參考解答：

如果 $n>2008$

$$\begin{aligned}&4^{2009}+4^{2008}+4^n\\&=4^{2008}(4+1+4^{n-2008})\\&=4^{2008}[1+2\cdot 2^1+(2^{n-2008})^2]\end{aligned}$$

因為 $4^{2008}$ 是完全平方數，故 $[1+2\cdot 2^1+(2^{n-2008})^2]$ 也是完全平方數

易見 $n=2009$ 是一個可能答案

如果 $n>2009$，則 $1<n-2008\Rightarrow$

$$\begin{aligned}&[1+2\cdot 2^1+(2^{n-2008})^2]\\&<[1+2\cdot 2^{n-2008}+(2^{n-2008})^2]\\&=(1+2^{n-2008})^2\end{aligned}$$

又 $[1+2\cdot 2^1+(2^{n-2008})^2]>(2^{n-2008})^2$

故 $[1+2\cdot 2^1+(2^{n-2008})^2]$ 介於兩個連續正整數的完全平方數之間，不可能是完全平方數。

所以使得 $4^{2009}+4^{2008}+4^n$ 是完全平方數的最大自然數 $n=2009$

解題評註：

本題難度不高，徵答人數有 23 人，有四位同學因為沒有討論 $n\ge 2008$ 的情況，直接將提出 $4^{2008}$ 後的 $(4+1+4^{n-2008})$ 當成完全平方數來論述被扣了一些分數外，其餘同學都能獲得滿分，要知道如果沒有 $n\ge 2008$，則 $(4+1+4^{n-2008})$ 可能為分數，也就不一定是完全平方數了！題目愈簡易，做答愈要謹慎，請謹記在心！