數學解題的巧妙結合

梁勇能

國立臺中第一高級中學

壹、前言

在數學學習中，怎樣解題是一個重要課題。各時代的數學家或者數學愛好者，無不因數學而廢寢忘食。如同數學家克萊恩所言:『對數學問題無法抵擋的誘惑與追求，能讓人全神貫注，在無止盡的挑戰中得到心靈寧靜,這是沒有衝突的戰鬥，是擺脫纏身雜物的避難所，在今日令人應接不暇的花花世界,這就像不變的高山美景可供欣賞。』

但是對於一般的學生而言，數學卻往往是夢魘一場。這當中的因素很多，但是能夠先去欣賞數學解題的美，無疑是入門的第一步。

貳、巧妙結合的例子

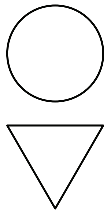
學習者先通過聽課、閱讀等過程獲得一定知識, 而後通過問題解決促進知識的鞏固, 加深對知識的理解, 使之能夠靈活應用知識,這是學習的過程。因此在學習的初期，如何使學習者能夠達到「理解」的目的。可說是重要的一步，正所謂「好的開始是成功的一半」。

學者認爲數學學習者可分爲兩種型態，一種是幾何學習型態，習慣用圖像方式進行思考；另一種則爲代數學習型態，習慣以代數的方式進行運算。波士頓學院的心理學家凱西(*Beth Casey*)和同事們設計了一種簡單的測驗可以顯示每個人偏好什麼方式來處理資訊。

在第一頁顯示題目：

> 三角形在圓圈之上

在第二頁顯示圖形：



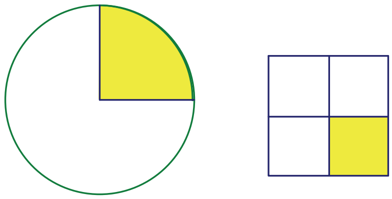
處理方式：

1. 你是否先把句子一個字一個字背起來，然後翻到另一頁，再把剛剛背起來的文字和圖像作比較？
2. 或者你在腦子中把句子轉換成圖像，然後翻到另一頁,再比較腦子裡的圖像和書上的圖像？

凱西稱採用第一組方法者爲『文字思考者』，採用第二組方法者爲『圖像思考者』。因此，若可以在教學中提供多重表徵，讓各種型態的學生都能夠以比較熟悉的方式來理解內容，將有助於對於內容的理解。底下將舉幾個實例說明：

例子一

在小學課堂上，小學生在學習分數$\frac{1}{4}$的概念，我們經常採用圖形的方式來介紹。由圖形中有色區塊所佔的比例來建立$\frac{1}{4}$的概念。



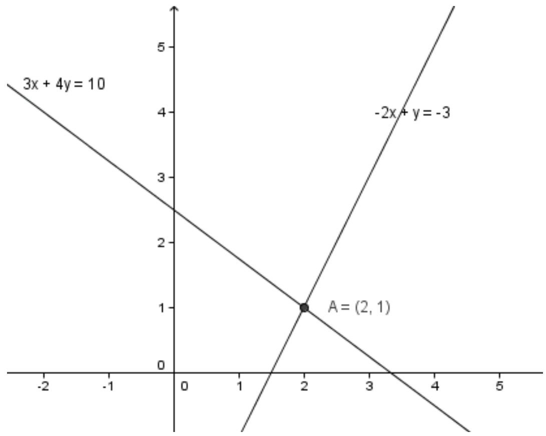
以*Bruner*（1966）的理論來說，正是藉著圖像表徵來幫助兒童的運思，使其在腦中能依據實物的影像，自己製作心像來進行理解。

即使在中學階段，這種代數觀念用幾何方式來表徵的例子，可說不勝枚舉。

例子二

例如解二元一次聯立方程組$\begin{cases} 2x-y=3 \\ 3x+4y=10 \end{cases}$，可將$2x-y=3$及$3x+4y=10$視為坐標平面上的兩條直線，其圖形的交點就是方程組的解。因此，在討論方程式解的狀況，變成討論兩直線的關係。

這樣的概念在高中的圓錐曲線單元，應用更為廣泛。例如橢圓變成了形如$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的方程式。換言之，原本是幾何圖形的內容，轉換成代數方程式的探討！無疑是替圓錐曲線開啓了另一扇窗！



這主要是歸功於笛卡兒的功勞。他引進了坐標，讓希臘的幾何有了不同的面貌，笛卡兒說：「希臘幾何太過抽象，他只是用來訓練瞭解，使想像力大為疲勞的工具罷了！而代數太過於遵守原則和公式，計算過於繁雜，不是一門改良心智的科學。」所以他把代數應用到幾何，為了讓幾何問題有一定的思考發法，發明了坐標幾何。利用坐標，幾何圖形可以被表示為坐標之間的運算關係，幾何問題也就變成解方程式的問題了。

在代數式化為幾何圖形的作法，往往可以讓題目變得簡單，但是卻充滿了技巧性，這樣能力競賽中，也會經常出現，往往使人讚嘆不已！

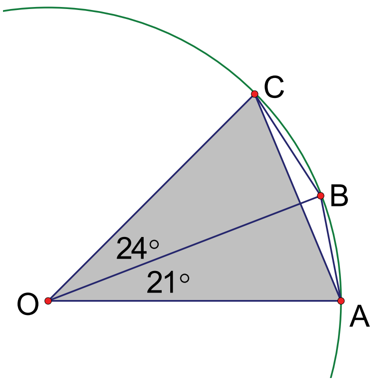
例子三

證明：$\sin 21°+\sin 24°>\frac{\sqrt{2}}{2}$

【參考解答】 在一個單位圓（半徑為 1）中顯然$\triangle OAB+\triangle OBC>\triangle OAC$

$$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin21°+\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin21°>\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin45°$$

$$\sin21°+\sin24°>\frac{\sqrt{2}}{2}$$



例子四

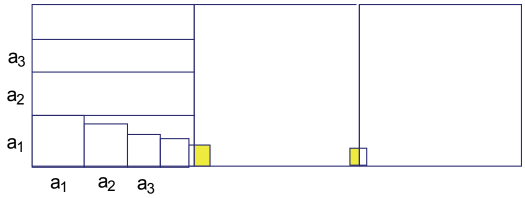
100 個正數 $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots\geq a_{100}$ 且滿足 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}=300$，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2=10000$

求證：$a_1+a_2+a_3>100$

【參考解答】：將 a_i^2 看成是邊長 a_i 的正方形面積$(1\leq i\leq100)$ 將這 100 個正方形一個接一個排起來，總長度為 300，這些正方形恰好可以排在一個長 300，寬 100 的長方形中。這個長方形可以分成三個邊長 100 的正方形。

如果 $a_1+a_2+a_3\leq100$，則在第一個正方形中含有三個寬度為 a_1、a_2、a_3 的長條形，互不重疊。

因為 a_i 遞減，所以在第二個正方形中所含的小正方形(包含不完整的陰影部分)的邊長都是小於或等於 a_2，則這些小正方形（包含不完整的部分）都可以移到寬度為 a_2 的長條中，而第三個正方形中的所有小正方形亦可移到寬度為 a_3 的長條中，這表示 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{100}^2<10000$，和已知條件矛盾了！

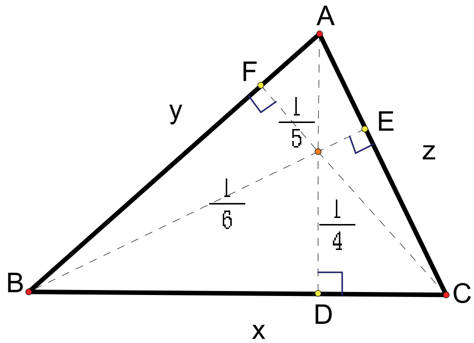


例子五

已知 $\begin{cases} x=\sqrt{y^2-\frac{1}{16}}+\sqrt{z^2-\frac{1}{16}} \\ y=\sqrt{z^2-\frac{1}{25}}+\sqrt{x^2-\frac{1}{25}} \\ x=\sqrt{x^2-\frac{1}{36}}+\sqrt{y^2-\frac{1}{36}} \end{cases}$，求 $x+y+z=$？

【參考解答】

此題若純粹從代數下手，看似極為複雜！若能夠從圖形的角度來聯想，每個式子都可以用圖形表示，



由圖可知$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{6}$恰好是三邊上的高，利用面積的分割

$$\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot y\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{2}\cdot z\cdot\frac{1}{6}=\Delta$$

$$\Rightarrow x=8\Delta, y=10\Delta, z=12\Delta$$

（Δ表示三角形的面積）

又由海龍公式

$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$s=\frac{1}{2}(8\Delta+10\Delta+12\Delta)=15\Delta$

$$\Delta=\sqrt{15\Delta(7\Delta)(5\Delta)(3\Delta)}=15\Delta^2\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow\Delta=\frac{1}{15\sqrt{7}}$$

$$\therefore x+y+z=30\Delta=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

除了在代數與幾何之間的轉換外，在組合學上，組合意義也是一種有別於傳統證明的方法。

例子六

求證： $kC_k^n=nC_{k-1}^{n-1}=(n-k+1)C_{k-1}^n$

【組合意義】情境：假設要為從n個人中選出k個人當委員，並且從中選出一人作為主任委員。

$\boxed{\text{方法一}}$：表示先從n個人中選出k個人當委員 C_k^n，接著再從中選出一人作為主任委員 $C_1^k=k$ ，故所有的方法數有 kC_k^n 。

$\boxed{\text{方法二}}$：也可以表示先從n個人中選出1個人當主任委員 $C_1^n=n$，接著再從剩下的n-1人中選出k-1人作為委員 C_{k-1}^{n-1}，故所有的方法數有 nC_{k-1}^{n-1} 。

$\boxed{\text{方法三}}$：先從n個人中選出k-1個人當委員 C_{k-1}^n ，接著再從剩下的n-k+1人中選出1人作為主任委員 $C_1^{n-k+1}=n-k+1$，故所有的方法數有 $(n-k+1)C_{k-1}^n$ 。

以上的方法數都可以達成相同的目的，故三種方法數都是相等的，因而得證此題！

例子七

若 p，q 是互質的正整數，則

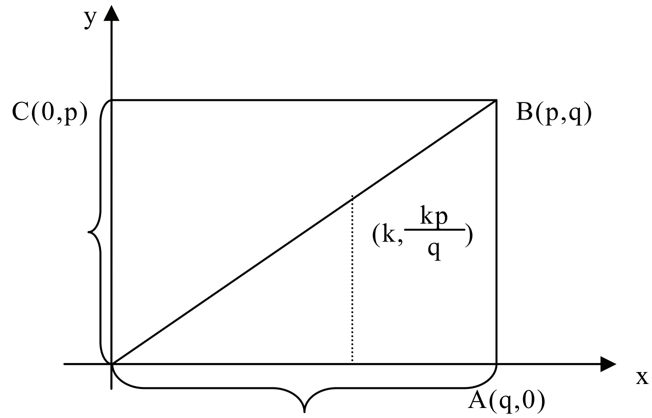
$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

[x]表示小於等於 x 的最大整數。

【參考解答】

考慮坐標平面上的矩形 $OABC$，其中 A、B、C 的坐標分別是(p，0)，(p，q)，(0，q)，O 為坐標原點。則在該矩形的內部的整數點共有(p-1)(q-1)個點。

考慮在對角線OB上所有的點的坐標(x，y)，都滿足 $\frac{x}{y}=\frac{q}{p}$ ，0<x<q，0<y<p。



當y是整數時，由於 $p \nmid q$ ，$p \nmid y$ 因此，$p \nmid qy$ ，即x不是整數，故對角線OB上沒有整數點。所以在△OAB內部共有整數點 $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ 個。

另一方面，在△OAB 內部，橫坐標為 k 的整數點個數為 $\left[\frac{kp}{q}\right](k=1,2,\cdots q-1)$ ，

故可以得到 $\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$

【另證】純粹從高斯函數的性質下手，

$$左式=\left[\frac{q-(q-1)}{q}p\right]+\left[\frac{q-(q-2)}{q}p\right]+\left[\frac{q-(q-3)}{q}p\right]+\cdots+\left[p-\frac{p}{q}\right]$$

$$=p+\left[-\frac{(q-1)}{q}p\right]+p+\left[-\frac{(q-2)}{q}p\right]+\cdots+p+\left[-\frac{p}{q}\right]$$

$$=(q-1)p-(\left[\frac{(q-1)}{q}p\right]+1)-(\left[\frac{(q-2)}{q}p\right]+1)+\cdots-(\left[\frac{p}{q}\right]+1)$$

$$=(q-1)p-(q-1)-(\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

$$=(p-1)(q-1)-(\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\left[\frac{3p}{q}\right]+\cdots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

比較之下，可以顯見證法一的美妙之處。

參、結語

以上介紹的例子，未必是輕易可以想出的，但是就是欣賞音樂一樣，跟著音樂的律動和旋律，同樣可以體會音樂之美。數學解題的巧妙結合，也可以使人發出讚嘆之聲，也能夠讓學生有更寬廣的思路，體驗所謂「條條大路通羅馬」的真諦，實非虛假！

肆、參考書目

史帝夫・奧森(2007)，數學高手特訓班，台北：遠流出版社

單墫(2001),數學競賽研究教程，南京：江蘇教育出版社

R.M.Gagne 著, 皮連生等譯(1999)，學習的條件和教學論， 上海: 華東師範大學出版社。