中學生通訊解題第六十六期題目解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
6601

紙上寫有 1,2,…,2008 這 2008 個正整數，第 1 步劃去前面 4 個數 1,2,3,4，在 2008 後面寫上劃去的 4 個數的和 10，第 2 步再劃去前面 4 個數 5,6,7,8，在最後面寫上劃去的 4 個數的和 26；如此下去（每步劃去前面 4 個數，在最後面寫上劃去的 4 個數的和），到最後剩下一個數爲止，所有寫出的數（包括原來的 1,2,…,2008）的總和是多少？

參考解答：

『方法一』

(1) 假定原先有 4^k 個數，其和爲 S，當 4^k 個數劃完，需要 4^{k-1} 步，紙上剩下 4^{k-1} 個數，這 4^{k-1} 個數的和等於原來 4^k 個數得和 S，故當最後剩下一個數時，所有寫出的數的總和是 $(k+1)S$。

(2) $2008=4^5+984$，原來的數經過 $\dfrac{984}{3}=328$ 步後，剩下 4^5 個數，被劃去的數有 $328\times4=1312$ 個，它們是 1,2,…,1312，而紙上剩下的 4^5 個數之和就是 $1+2+\ldots+2008$，因此，最後剩下一個數時，所寫出數的總和爲 $(1+2+\ldots+1312)+6(1+2+\ldots+2008)=12963544$

『方法二』

以下*斜體字*爲寫上的數字，加網底字爲每組剩下的數字，

第一組：**2008 個**

1,2,…,2008

第二組：**502 個**

(1＋2＋3＋4),(5＋6＋7＋8),……,(2005＋2006＋2007＋2008)

第三組：**125 個，剩下 2 個**

(1＋…＋16),(17＋…＋32),……,(1985＋…＋2000)，(2001＋…＋2000)，(2002＋…＋2008)

第四組：**31 個，剩下 3 個**

(2001＋…＋2008,＋1＋…＋32),(33＋…＋96),…,(1889＋…＋1952),(1953＋…＋1968)，(1969＋…＋1984)，(1985＋…＋2000)

第五組：**8 個，剩下 2 個**

(1953＋…＋2008,＋1＋…＋32), (33＋…＋288), …,(1569＋…＋1824)，(1825＋…＋1988),(1989＋…＋1952)

第六組：**2 個，剩下 2 個**

(1825＋…＋2008,＋1＋…＋288), (289＋…＋1312), (1313＋…＋1568),(1569＋…＋1824)

第七 組：**1 個**

(1＋…＋2008)

所寫出數的總和爲以上七組中黑字的

數字的總和，總和為(1＋2＋...＋1312)＋6(1＋2＋...＋2008)＝12963544

解題評註：

1. 『方法二』是有位同學的作法，是根據題意按部就班畫記、計算得到解答。硬算，亦是解決數學問題的方法之一，同學們可從過程中訓練自己演繹、歸納的能力。
2. 『方法一』利用歸納出本題的規律性『假定原先有 4^k 個數，其和為 S，當 4^k 個數劃完，需要 4^{k-1} 步，紙上剩下 4^{k-1} 個數，這 4^{k-1} 個數的和等於原來 4^k 個數得和 S，故當最後剩下一個數時，所有寫出的數的總和是$(k+1)S$』而解決此題。
3. 本題參與徵答的同學中，一些同學的作答中或有錯誤、或是不完整，同學作答之後應再作檢驗，當可減少錯誤，以期作答更完整。
4. 解題的訓練，不是答案作出來就 OK 了！可進一步思考、歸納這個數學問題是否有規律性？是否有其他的解法？可否推廣至一般性？這部份的思考、研究會讓您獲益良多！

問題編號
6602

有2008張卡片，編號：1,2,3,4,---,1000，在編號是2的倍數卡片印上一個”*”記號；在編號是4的倍數卡片再增加印上一個”*”記號；在編號是8的倍數卡片再增加印上一個”*”記號；在編號是16的倍數卡片再增加印上一個”*”記號，然後停止印卡片的動作。(例如：編號是64的卡片因為是16的倍數，所以共印上4個”*”記號。)將卡片由編號1,2,3,----,1000號順著正整數的編號開始數”*”記號的次數，則第2008個”*”記號是在編號哪一張上？

參考解答：

找出規律

將 1-16 號卡片的”※”記號依序標出

卡片號碼	1	2	3	4	5	6	7	8
※個數	0	1	0	2	0	1	0	3

卡片號碼	9	10	11	12	13	14	15	16
※個數	0	1	0	2	0	1	0	4

1-16 號共標有 15 個※號

17-32 號也標有 15 個※號

2008 ÷16=133---13

第 13 個標號標於第 16 張卡片上

16×134=2144

但只有 2008 張卡片，故此題無解。

解題評註：

這是一個非常簡單的數學問題，運用因數倍數與計數的方法來處理即可，惜因所問的問題『第 2008 個”*”記號』的卡片編號超過 2008，故此題看到學生的答題情形可分為兩種：一為超過編號無解，另一個為把第 2008 個※編號的卡片算出來，但整體來說，同學都答得非常好。

問題編號
6603

找出所有的質數 p ,使得 p^2+2639 至少有 16 個不同的正因數。

參考解答：

(1) $p=2$, $p^2 + 2639 = 2643 = 3\times881$，有 $(1+1)(1+1) = 4$ 個正因數。

(2) $p=3$, $p^2 + 2639 = 2648 = 2^3\times331$，有 $(3+1)(1+1) = 8$ 個正因數。

(3) $p>3$ 時，

$\because p \equiv \pm1 \pmod 3$ $\therefore p^2 + 2639 \equiv 2640 \equiv 0 \pmod 3$。

又 p 爲奇數，$\therefore p^2 \equiv 1 \pmod 8$，則 $p^2 + 2639 \equiv 2640 \equiv 0 \pmod 8$

即 $3 \mid (p^2 + 2639)$ 且 $8 \mid (p^2 + 2639)$，

所以 $p^2 + 2639 = 24k = 2^3\times3\times k$, 其中 $k > 24$。

則 $p^2 + 2639$ 至少有 $(3+1)(1+1)(1+1) = 16$ 個不同的正因數。

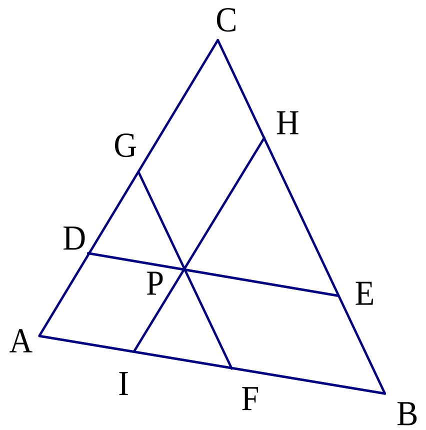
因此，若 p 是大於 3 的質數，則 p^2+2639 至少有 16 個不同的正因數。

解題評註：

本題是檢驗同學們是否清楚標準分解式中正因數個數的求法；同時也要能將整數適當地分類，來檢驗一個整數是否能有 3 或 8 的因數。

問題編號
6604

在ΔABC 中，$\overline{AB} = 850$，$\overline{BC} = 900$，$\overline{CA} = 1020$，點 P 在三角形內部，$\overline{DE}$ 、$\overline{FG}$ 、$\overline{HI}$ 都通過點 P，長度都爲 d，且 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$，$\overline{GF} \parallel \overline{CB}$，$\overline{HI} \parallel \overline{AC}$，則 $d = ?$



參考解答：

$\overline{EH} = \overline{BC} - (\overline{BE} + \overline{HC})$

$= \overline{BC} - (\overline{FP} + \overline{PG}) = 900 - d$，

同理可得，$\overline{GD} = 1020 - d$，

由 ΔDPG 與ΔABC 相似

得 $\overline{DP} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CA}}\cdot\overline{GD} = \dfrac{850}{1020}(1020 - d)$，

再由ΔPEH 與ΔABC 相似

得 $\overline{PE} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}\cdot\overline{EH} = \dfrac{850}{900}(1020 - d)$，

由 $d = \overline{DP} + \overline{PE}$ ，將上面二式相加得，

$$d = \frac{850}{1020}(1020 - d) + \frac{850}{900}(1020 - d)$$

$\Rightarrow d = 612$

問題編號
6605

設 $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=7$ ，則 $x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}$ 之值為何？

參考解答：

『方法一』

$\because \left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=7$　　同乘 $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)$，得

$$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)\left(y+\sqrt{y^2+4}\right)=7\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)$$

$$\Rightarrow 4=7\left(xy-x\sqrt{y^2+4}-y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}\right)$$

$$xy-x\sqrt{y^2+4}-y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=\frac{4}{7}\ldots①$$

又由條件乘開

$$xy+x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=7\ldots②$$

②式－①式，得 $2\left(x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}\right)=\frac{45}{7}$

故 $x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}=\frac{45}{14}$

『方法二』

由條件乘開　$xy+x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=7\ldots①$

令 $x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}=z$　則式①化為 $z+xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}=7$

$$\Rightarrow 7-z=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}$$

平方得 $49-14z+z^2=x^2y^2+(x^2+1)(y^2+4)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}\ldots②$

又 $z^2=\left(x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1}\right)^2 = x^2(y^2+4)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}$

代入②得 $49-14z=4$，所以 $z=\dfrac{45}{14}$

『方法三』

(1) 設 $x+\sqrt{x^2+1}=a$ ， $y+\sqrt{y^2+4}=b$ ，則 $ab=7$

(2) $\because x+\sqrt{x^2+1}=a \quad \therefore \sqrt{x^2+1}=a-x \ \Rightarrow x^2+1=a^2-2ax+x^2 \Rightarrow x=\dfrac{a^2-1}{2a}$

(3) $\because y+\sqrt{y^2+4}=b \therefore \sqrt{y^2+4}=b-y \ \Rightarrow y^2+4=b^2-2bx+y^2 \Rightarrow y=\dfrac{b^2-4}{2b}$

(4) $x\sqrt{y^2+4}+y\sqrt{x^2+1} = x(b-y)+y(a-x)=bx+ay-2xy$

$$=b\cdot\frac{a^2-1}{2a}+a\cdot\frac{b^2-4}{2b}-2\frac{a^2-1}{2a}\cdot\frac{b^2-4}{2b}=\frac{(ab)^2-4}{2ab}=\frac{7^2-4}{2\cdot 7}=\frac{45}{14}$$

解題評註：

1. 本題參與徵答的同學大部分都答對，可看出同學的代數運算能力很好。
2. 『方法一』利用$(a+b)(a-b)=a^2-\mathrm{b}^2$，同乘$\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{y^2+4}-y\right)$，再由原式乘開，經由①式、②式得到答案。
3. 『方法三』利用變數變換，亦是數學上常用、好用的方法。