中學生通訊解題第六十七期題目解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
6701

在 93×19(93 列 19 行)的矩形方格紙的左下角的方格中放有一枚棋子，甲乙兩人進行如下的遊戲:甲先且兩人輪流移動棋子,每次可將棋子向上移動若干個方格或向右移動若干個方格，最後無法移動棋子者為負方。問誰有必勝策略?請說明理由。

參考解答：

第 19 行	第 18 行		第 3 行	第 2 行	第 1 行	
				(2,1)	(1,1)	第 1 列
				(2,2)	(1,2)	第 2 列
			(3,3)			
	(18,18)					第 18 列
(19,19)					(1,19)	第 19 列
(19,20)					(1,20)	第 20 列
(19,93)					(1,93)	第 93 列

如圖，設共有 19 行 93 列，將每一方格坐標化，方格紙的左下角的方格(19,93)中放有一枚棋子，甲先從(19,93)向上移動棋子至(19,19)，然後換乙移動，接著甲依照以下規則移動：

(1) 若乙向右移動 k 單位，則甲向上移動 k 單位。

(2) 若乙向上移動 k 單位，則甲向右移動 k 單位。

如此甲必定落在斜對角線(18,18)、(17,17)、…、(2,2)、(1,1)中，也就是甲最後落在(1,1)中，乙則無法移動棋子，故甲勝。

解題評註：

此題主要是要說明必勝的關鍵在於搶到關鍵方格點，若能想出這一點，應該就不難了。

問題編號
6702

有一袋糖果隨意分給 15 個小孩,每個小孩至少分到一塊，證明其中必有一些小孩所得的糖果之和是 15 的倍數。

參考解答：

設 15 個小孩所得的糖果數為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{15}$。考慮

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots, S_{15} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15}$$

這 15 個數除以 15 的餘數，若有一個數為 0 則得證。

若皆不為 0 則必至少有兩個餘數相等，假設是 S_i, S_j $(i < j)$除以 15 的餘數相等，則 $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$除以 15 的餘數為 0，得證。

解題評註：

本題須用到抽屜(鴿籠)原理，造出適當的抽屜，以餘數來切入解題。有位同學雖然以自己的方式說明解答，但是若能將論述轉換成數學式子，必定能更加嚴謹精確,更具說服力。很多時候我們看到題目，直覺它就是對的，用講的也可以搬出一些理念舉例支持，諸如：若是這樣就如此這般，若是那樣就怎樣不可能。但是畢竟不是口試，還是得學習怎樣用數學語句精確地描述自己的想法，共勉之。

問題編號
6703

(1) 如果 $2^4 \times 23 \times 877$ 其正因數由小到大依序排列為 $d_1, d_2, d_3, d_4, \cdots, d_{20}$ 的數列，試求 $d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots + d_{20}$ 的值。

(2) 若已知 a, b, c 為質數, x 為正整數,滿足 $a^x < b, a^x \times b < c$ 若 $N = a^x \cdot b \cdot c$ 且其正因數由小到大依序排列為 $d_1, d_2, d_3, d_4, \cdots$ 的數列,試推論上述的一般結果。

參考解答：

(1) 題目為 $2^4 \times 23 \times 877$ 其正因數由小到大依序排列為 $d_1, d_2, d_3, d_4, \cdots d_{20}$ 數列，可得

$$\begin{aligned} & d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots + d_{20} \\ & = (877+1)((2^1 + 2^3) + 23(2^0 + 2^2 + 2^4)) \\ & = 432854 \end{aligned}$$

(2) 當 x 為偶數時：

$$\begin{aligned} & d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots + d_{2k} + \cdots \\ & = (c+1)((a^1 + a^3 + \cdots + a^{x-1}) + \\ & b(a^0 + a^2 + a^4 + \cdots + a^x)) \end{aligned}$$

當 x 為奇數時:

$$\begin{aligned} & d_2 + d_4 + d_6 + d_8 + \cdots + d_{2k} + \cdots \\ & = (a^1 + a^3 + \cdots + a^x)(b+1)(c+1) \end{aligned}$$

解題評註：

本題屬於初等數論的計算問題，並且需要運用排列的計算技巧以簡化計算過程並且避免其中大量計算。許多同學運用數學運算性質解題。在作法表達上具有完整性與流暢性，值得嘉許。

問題編號

6704

是否存在這樣的整數 a,b,c，使得方程式 $ax^2+bx+c=0$ 和 $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$ 都有兩個整數根?

參考解答：

不存在。

若存在這樣的整數 a, b 和 c。

不妨假設 a 爲偶數，[否則可用 $-(a+1)$, $-(b+1)$, $-(c+1)$ 討論]

由於方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩個根都是整數，所以 $\frac{c}{a}$ 爲整數，則 c 爲偶數；同理，$-\frac{b}{a}$ 爲整數，所以 b 爲偶數；這表示 $a+1$, $b+1$, $c+1$ 都是奇數，因此對於所有整數 x, $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)$ 都是奇數，則 $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)=0$ 沒有整數解。所以不存在滿足條件的整數 a, b, c。

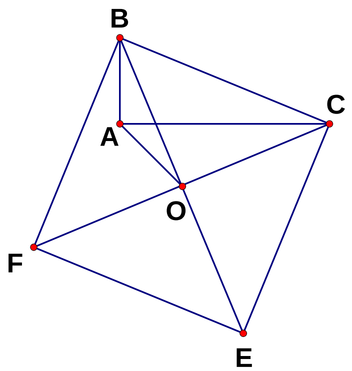
解題評註：

本題是希望同學在討論整數的整除中可以想到利用整數的奇偶性來解題。

問題編號

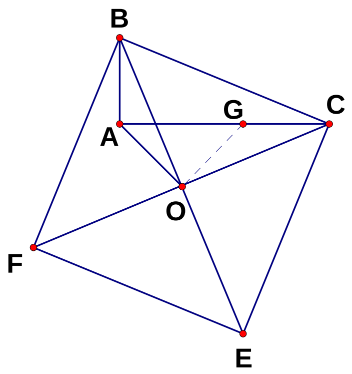
6705

以直角△ABC 的斜邊爲一邊，在△ABC 的同側作正方形 $BCEF$，設正方形的中心爲 O，作 $\overline{AO}$，若 $\overline{AB}=4$，$\overline{AO}=3\sqrt{2}$，則 $\overline{AC}$ 的長爲？



參考解答：

『方法一』



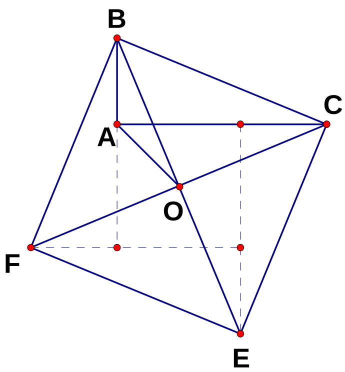
在 $\overline{AC}$ 上取點 G，使 $\overline{CG}=\overline{AB}=4$，而∠$BAC$＝∠$BOC$＝$90^0$，所以 A、O、C、B 四點共圓，故∠ABO＝∠ACO

$\because \overline{BO}=\overline{CO}$ $\therefore \triangle BAO \cong \triangle CGO$

由$\angle AOB=\angle GOC$，知$\angle AOG=90^0$

又$\overline{AO}=\overline{OG}$，故$\overline{AG}=6$，因此$\overline{AC}=10$

『方法二』



如圖，點 O 也是小正方形的中心，於是，$\overline{AO}$爲小正方形對角線的一半，故它的邊長爲 6，因此$\overline{AC}=6+\overline{AB}=10$

『方法三』

$\because \angle BAC=\angle BOC=90^0$ $\therefore A$、O、C、B 四點共圓，設$\overline{BO}=\overline{CO}=a$，$\overline{BC}=\sqrt{2}\,a$，根據托勒密定理$\overline{BC}\times\overline{AO}+\overline{BA}\times\overline{CO}=\overline{BO}\times\overline{AC}$

$\sqrt{2}a\times 3\sqrt{2}+4\times a=a\times\overline{AC}$ 故$\overline{AC}=10$

註：托勒密(***Ptolemy***)定理

圓內接四邊形 $ABCD$ 中，

$\overline{AB}\cdot\overline{CD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=\overline{AC}\cdot\overline{BD}$。

解題評註：

1. 本題參與徵答的同學大部分都答對，可看出同學的代數運算能力很好。
2. 『方法一』利用作輔助線將分散的條件有效的聚集起來而得到答案。
3. 『方法二』巧妙的作構造圖而得到答案。
4. 『方法三』台北縣江翠國中廖同學利用托勒密定理作答，供同學參考。