推薦數學普及書籍--幾何的寶藏

張素菱* 郭李宗文

國立臺東教育大學 幼兒教育研究所

壹、前言

我從「幾何的寶藏」這本書中，得知，原來人類最早的幾何形式來源，是由探求自然界現象而始得注意。例如月亮的顯現形狀「圓缺」、光線行走的路徑「直線」等，因此造出如圓形、方形等器皿。甚至，著名的埃及大金字塔，也是幾何中，高水準的表現。由金字塔的建築觀之，足以見得，古代幾何及測量土木的技術水平，均已達到高超的技術水平。其中最著名的胡夫金字塔，高 146.5 公尺，底座是一個正方形的四角錐。種種看來，幾何學的確是一門專門的空間研究科學，無論是科學、建築技術、藝術發展等學術探究，都離不開幾何學。

貳、介紹「勾股定理」

在幾何中，相當著名的定理，為兩千多年古希臘數學家畢達哥拉斯所發現的「勾股定理」。和這個定理雷同的，是在一千六百年，中國的數學家趙君卿，他也寫了「勾股圓方圖」，全文只有 530 個字，也證明了如同勾股定理一般的理論。在不同國度，不同時空之間，無論中外數學家，對於數學的探求精神，都十分熱衷。數學的奧祕，存在於自然界之中，讓許多人為之風迷。也願意花許多的時間，在探尋幾何的深奧學問。

參、認識「古代三大幾何難題」

一、立方倍積問題

除了畢氏定理之外，在很久以前，傳說古希臘的德里群島中，有一個阿波羅神，嫌腳下的祭壇太小，要求當地居民做一個為原祭壇兩倍大的新祭壇，以示信仰之虔誠。結果當地居民將邊長放大為原來的兩倍，卻做出了八倍大的祭壇，讓阿波羅神大為光火。因為無法解決這個幾何難題，它成為了古代三大幾何難題之一「立方倍積問題」。

二、三等分角問題

第二個古代三大幾何難題是「三等分角問題」。公元前四世紀，托勒密一世定都亞歷山大城。在城郊一座圓形別墅中（如圖一），住了一位大公主，大公主的居室正建在圓心處，別墅的南北兩側圍牆上，各開一個扇門。河上建了一座橋，北門、橋、南門正好呈一直線。而且從北門到居室與從北門到橋的距離相等。小公主長大了，也要建一個和大公主一樣的居室。當工匠把南門建好，才出現這個問題：要如何使

*為本文通訊作者

北門到居室與北門到橋的距離一樣遠呢？這下工匠可為難了。

假設 OP 與河的夾角是 α

由 $QK = QO$ 得 $\angle QKO = \angle QOK$

但是 $\angle QKO = \alpha + \angle KPO$ 又 $\angle OQK = \angle OPK$

在 ΔQKO 中的內角和$=\pi$ 所以 $\angle QKO + \angle QOK + \angle OQK =(\alpha + \angle KPO)+(\alpha + \angle KPO)+ \angle KPO$

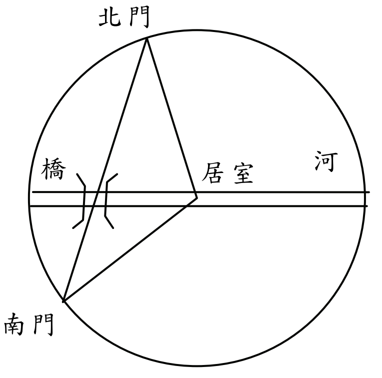
$=3\angle KPO +2\alpha = \pi$ 即 $\angle KPO = \dfrac{\pi - 2\alpha}{3}$

只要能把 $180°-2\alpha$ 這個角三等分，就能確定橋和北門的位置。這個問題，最後連偉大的阿基米德也沒能解決。

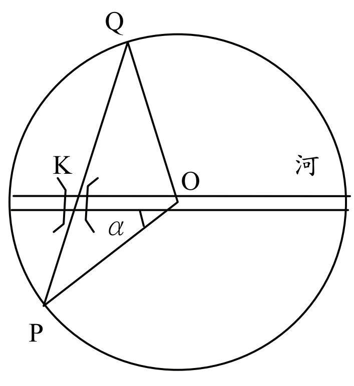
三、化圓為方

最後一個幾何難題，是在公元前 5 世紀，古希臘哲學家安那薩哥拉斯因犯了「褻瀆神靈罪」被投入監獄。在獄中，他看見方窗外的月亮，時而比方窗大，時而比方窗小，最後他說：「好了，就算兩個圖形面積一樣大好了。」安那薩哥拉斯把「求作一個正方形，使它的面積等於已知的圓面積」作為一個尺規作圖題來研究。最後，他花了一生的時間，都無法解決這個看似簡單的問題。許多數學家對這個問題很感興趣，可是沒有一個人能解決成功。這就是古代三大幾何難題之一「化圓為方」。

初看這三個難題，心裡覺得十分有趣。這三個幾何題目看似簡單，但是卻要如何解答呢？兩千年過去了，這三個合稱古代三大幾何難題「三等分任意一角」、「立方倍積」、「化圓為方」，卻沒有一個得到解決！古代數學家為什麼沉迷於解決這三個問題呢？我想，大概是人類急於證實自己的數學實力與肯定自我的智力吧！這三個問題，難就難在它們只允許用直尺和圓規作答。真正說來，這三個問題，根本無法用尺規作圖解決。在數學之中，有些數學問題，是可以用尺規求解。例如，利用已知二線段 a ,b，可以用尺規做出 ab 及 $\dfrac{b}{a}$。但是已知線段 a，可以做出 $\sqrt{a}$ 卻無法做出 $\sqrt[3]{a}$。迷戀「三等分任意角」的人，稱為「三等分角家」。一位法國科學家打趣的說，這些「三等分角家」害了一種「聰明病」。



圖一



圖二

肆、認識熱愛幾何的數學家

古代人對圖形的研究，最早是憑直觀觀察或實驗來確定性質。但是直觀法，有時是靠不住的。所以必須伴隨邏輯來加以支撐幾何的理論證明。第一個完成幾何學內容鎖鏈整理的人，是古希臘數學家歐幾里得（公元前 330-275 年）。在他眾多的著作中，最出名的是「幾何原本」。這本書統御幾何學兩千多年。內容幾乎包括我們國中所學的平面幾何全部內容。從古至今，數學家幾乎都鑽研過此書。

後來醉心於幾何的學者，還有阿基米德、高斯、波約伊、羅巴切夫斯基、黎曼等偉大的數學家。就連法國皇帝拿破崙，也對幾何有著極大的興趣。在這本書裡，我見到了幾何題的奧妙及有趣的地方。也看到許許多多偉大的數學家，願意投注畢生的時間於幾何之上。數學或幾何學，即使它可能會剝奪一個人一生中的一切，包含時間、健康、休息和幸福。但是熱衷數學的人，並不懼怕這些付出。對他們來說，求得數學的解，或者破解幾何難題，才是他最大的榮耀與喜悅。

除此之外，如果沒能翻開這本書，從課本中學得的知識認知，我們只知道三角形的內角和等於180°。若不因閱讀，那能知道原來還有一種由羅巴切夫斯基提出的新幾何，稱作「羅氏幾何」，它將三角形的內角和，定義於小於180°，產生一種「偽球面」的幾何圖形。還有另一個由黎曼是出的「黎曼幾何」，反倒是將三角形的內角和，定義為大於180°。後兩者，統稱「非歐幾何」。這兩種幾何，用在現代物理中，找到了具體的用處。成了重要現實意義的幾何學。

伍、結語

幾何學是專門研究空間形式，以及各種圖形的性質的一門科學。科學、技術、自然、藝術、建築，都離不開幾何學而獨立作業。探尋幾何的奧妙，除了認識了古代幾何三大難題，也見識到許多願意投入時間、用心專研幾幾何問題的數學家的偉大與執著。此外，本書列了很多有趣的幾何問題，提供我們做思考。我認為，人活著就要思考。思考的方向可以多元化，在不受拘泥的時間與空間上行走，讓知識的維度更加廣闊。在幾何學中，我們看到了空間向度，找到連結圖形與生活的樂趣。只要有心、用心，生活無處不美，無處不精采。觀「幾何的寶藏」一書，發現了人間處處是寶藏，但看自己是否用心去體會。

陸、參考文章

李毓佩（2001）。**幾何的寶藏**。台北市：益智工坊