中學生通訊解題第六十五期題目解答與評析

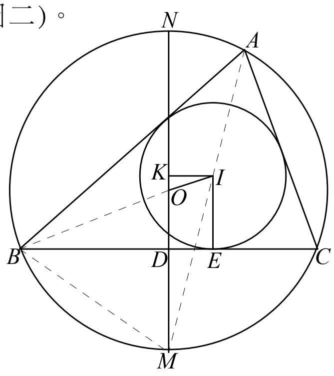
臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
6501

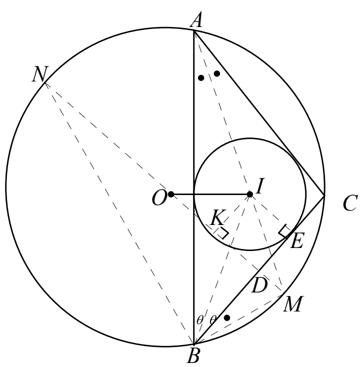
已知ΔABC 爲等腰三角形，它的外接圓半徑是 12，內切圓半徑是 4.5，試求兩圓的圓心之間的距離爲？

參考解答：

當頂角<90°時，如(圖一)；當頂角>90°時，如(圖二)。



(圖一)



(圖二)

設外心爲 O，內心爲 I，$\overline{BC}$ 弧的中點爲 M，外接圓 O 的直徑 $\overline{MN}$ 交 $\overline{BC}$ 於 D。過內心 I 作 $\overline{IE}\perp\overline{BC}$ 於 E，$\overline{IK}\perp\overline{MN}$ 於 K

$\because\ \angle MIB=\angle MAB+\angle ABI=\angle MAC+\angle IBE$

$=\angle MBC+\angle IBE=\angle MBI$

得 $\overline{MB}=\overline{MI}$，又 ΔMBN 爲直角三角形，所以由射影定理知 $\overline{MB}^2=\overline{MD}\times\overline{MN}$

又 $\overline{MK}=\overline{MI}\cos\angle IMD$，由餘弦定理

$IO^2=\overline{MI}^2+\overline{MO}^2-2\,\overline{MI}\times\overline{MO}\times\cos\angle IMD$

$=\overline{MI}^2+12^2-2\,\overline{MK}\times12=\overline{MB}^2+12^2-2\,\overline{MK}\times12$

$=\overline{MD}\times\overline{MN}+12^2-2\,\overline{MK}\times12$

$=\overline{MD}\times24+12^2-2\,\overline{MK}\times12$

$=12^2-2\times12(\overline{MK}-\overline{MD})=R^2-2\times12\times\overline{DK}$

$=12^2-2\times12\times\overline{IE}=12^2-2\times12\times4.5$

故兩圓的圓心間的距離爲

$\sqrt{12(12-2\times4.5)}=6$

解題評註：

本題是一個幾何定理的特殊化情形，上述是結合幾何與三角函數的解法，僅供各位參考。我們期望同學們儘量以幾何思考來解本題，當然坐標化、代數化或三角函數法也都可解出答案。

問題編號
6502

有一列車，沿途共有 20 個車站(包括起點與終點)，並規定在同一車站上車的旅

客不能在同一車站下車，為了保證上車的旅客都有座位(每位旅客一個座位)，求列車至少要安排多少座位。

參考解答：

考慮列車在第 j 站出發時所需要的座位數，對於固定的 $i(1 \le i \le j)$，在第 i 站上車的旅客中，當列車通過第 j 站時仍然留在車上的至多有 $20-j$ 人，這是因為同在第 i 站上車要在不同的車站下車，而後面只有 $20-j$ 個站。

注意到 $i=1,2,\cdots,j$，於是，列車在第 j 站出發時最多需要 $j(20-j)$ 個座位。

當 j 取遍 $1,2,\cdots,20$ 時，$j(20-j)$ 的值分別為

$$19,36,51,64,75,84,91,96,99,100,$$
$$99,96,91,84,75,64,51,36,19$$

，故列車有 100 個座位就足夠了。

另外，當第 $i(1 \le i \le 10)$ 站上 $20-i$ 人時，前 10 個站上車的旅客在後面每個站都分別有一個人下車，於是，當列車從第 10 站出發時，車上有旅客 $10 \times 10 = 100$ 人，這時列車需要 100 個座位。

綜上所述，列車至少要安排 100 個座位。

解題評註：

答題同學大都是逐一列出各站上下車人數的範圍，並找出滿足條件的最少座位數，但若能以變數替代，藉以討論出範圍更佳。

問題編號
6503

對所有正整數 x、k，滿足

$$\frac{24k}{x^3+x^2-x-2}=x$$

證明：x 為 6 的倍數。

參考解答：

『方法一』

∵四個連續正整數必有兩個偶數，其中有一個是 4 的倍數，四個連續正整數至少有一個數是 3 的倍數，而 2×3×4＝24，故四個連續正整數必是 24 的倍數。

當 x 為正整數時，

$(x-1)\,x\,(x+1)(x+2)$

$=x(x^3+2x^2-x-2)$ ……①

由題設得

$x(x^3+x^2-x-2)=24k$……②

而 $x(x^3+x^2-x-2)=x(x^3+2x^2-x-2)-x^3$

由①②得 x^3 為 24 的倍數

∵24 的質因數為 2、3

∴2、3 為 x 的質因數，得 x 為 6 的倍數。

『方法二』

$x(x^3+x^2-x-2)=24k$

$x^4+x^3-x^2-2x \equiv 0 \pmod 6$

① 當 $x \equiv 1 \pmod 6$ 時，$x^4+x^3-x^2-2x \equiv 1+1-1-2 \equiv 1 \equiv 5 \pmod 6$，不合

② 當 $x \equiv 2 \pmod 6$ 時，$x^4+x^3-x^2-2x \equiv 4+2-4-4 \equiv -2 \equiv 4 \pmod 6$，不合

③ 當 $x \equiv 3 \pmod 6$ 時，$x^4+x^3-x^2-2x \equiv 3+3-3-0 \equiv 3 \pmod 6$，不合

④ 當 $x \equiv 4 \pmod 6$ 時，$x^4+x^3-x^2-2x \equiv 4+4-4-2 \equiv 2 \pmod 6$，不合

⑤當 $x \equiv 5 \pmod 6$ 時，$x^4+x^3-x^2-2x \equiv 1+5-1-4 \equiv 1 \pmod 6$，不合

⑥ 當 $x \equiv 0 \pmod 6$ 時，設 $x=6n$，n 爲正整數。

$x^4+x^3-x^2-2x = 1296n^4+216n^3-36n^2-12n$

$=24(54n^4+9n^3)-12n(3n+1)$

而 n、$3n+1$ 必定爲一奇數、一偶數，

$\therefore$ $x^4+x^3-x^2-2x$ 爲 24 的倍數，

由①~⑥得 x 爲 6 的倍數。

解題評註：

1. 『方法一』用正整數的性質：四個連續正整數必是 24 的倍數來解題；
『方法二』用模 6(mod 6)同餘，來解題。
2. 本題參與徵答的同學 13 位同學中有 12 位以『方法二』模 6(mod 6)同餘的概念來解題。

問題編號
6504

已知 n,k 均爲正整數，且滿足不等式 $\dfrac{1}{7}<\dfrac{n-k}{n+k}<\dfrac{63}{439}$。若對於某一給定的正整數 n，只有唯一的一個正整數 k 使不等式成立。求所有符合要求的正整數 n 中的最大值與最小值。

參考解答：

由已知不等式得 $\dfrac{188}{251}n<k<\dfrac{3}{4}n$ (i)，因爲 k 爲正整數，對於給定的 n 來說，k 的值只有一個，所以 $\dfrac{3}{4}n-\dfrac{188}{251}n\le 2$，即 $\dfrac{n}{1004}\le 2 \Rightarrow n\le 2008$，當 $n=2008$時，代入(i)式得 $1504<k<1506$，因此，k 的值只能取唯一的值 1505，故 n 的最大值爲 2008。

由式(i)得 $\dfrac{752}{251}<\dfrac{4k}{n}<3$，

即 $\dfrac{250}{251}<\dfrac{4k-2n}{n}<1$，

得 $n>251$，

當 $n=252,253,254$時，分別代入(i)式，

依次有 $188\dfrac{188}{251}<k<189$，

$189\dfrac{125}{251}<k<189\dfrac{3}{4}$，

$190\dfrac{62}{251}<k<190\dfrac{1}{2}$，

均不符合要求。

當 $n=255$時，$190\dfrac{250}{251}<k<191\dfrac{1}{4}$，

故有唯一的正整數 $k=191$。

所以 $n=255$是符合條件的最小值。

因此，所有符合要求的正整數 n 中的最大值是 2008，最小值是 255。

解題評註：

參與本題徵答的同學大部分只求得 n 的最大值，關於 n 的最小值部分，則討論地不夠詳細，以致於答對率不高。

問題編號
6505

已知相異實數 a,b,c,d 滿足
$a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{d}=d+\frac{1}{a}=x$，求 x 的值。

參考解答：

由條件可得 $d=x-\frac{1}{a}=\frac{ax-1}{a}$，

$c=x-\frac{1}{d}=x-\frac{a}{ax-1}=\frac{ax^2-x-a}{ax-1}$，

$b=x-\frac{1}{c}=x-\frac{ax-1}{ax^2-x-a}$，
$=\frac{ax^3-x^2-2ax+1}{ax^2-x-a}$

$a+\frac{ax^2-x-a}{ax^3-x^2-2ax+1}=x$，

故
$ax^4-a^2x^3-x^3-2ax^2+2a^2x+2x=0$，
因式分解得 $x(x^2-2)(ax-a^2-1)=0$，
所以，$x=0$ 或 $x^2=2$ 或 $ax-a^2-1=0$。

若 $x=0$，則由 $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=x=0$ 有 $b=c$，與已知矛盾；

若 $ax-a^2-1=0$，則有 $x=a+\frac{1}{a}$，但 $x=a+\frac{1}{b}$，從而 $a=b$，與已知矛盾。

故 $x^2=2$，即 $x=\pm\sqrt{2}$。

解題評析：

本題只要有耐心，逐一替換為以表示，即可求出正解。但需注意最後要把不可能的情形排除掉。