

# 康普頓效應--碰撞後的電子

賴奕帆

臺北市私立薇閣高級中學

## 壹、前言

高三下學康普頓效應時，學生總有個疑問，康普頓散射公式真的只能死背嗎？X 射線與電子碰撞後，散射光子的波長變長，但碰撞後的電子呢，為何無法得知碰撞後的電子速度狀態？

康普頓效應，由於碰撞後的電子獲得極高的能量，不能用古典  $K_e = \frac{1}{2}mv^2$ 、 $P_e = mv$ ，必須用狹義相對論中，勞倫茲變換換算而得的  $K_e = (\gamma - 1) \times mc^2$ 、 $P_e = \gamma \times mv$ ，來計算電子動能與動量。

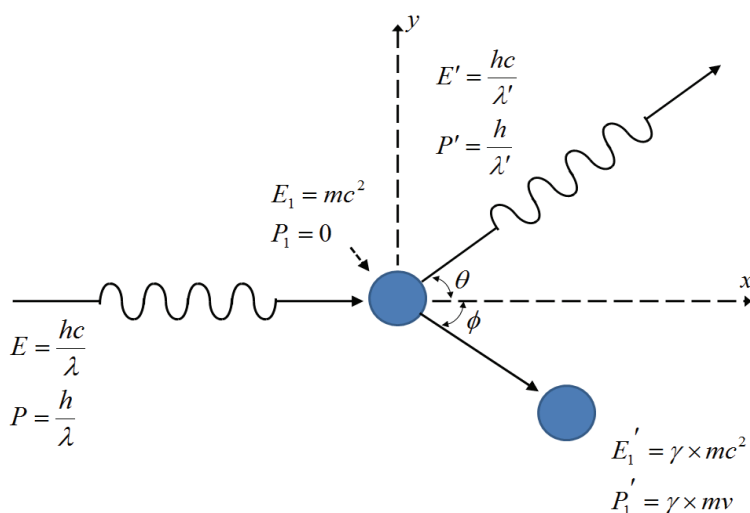
愛因斯坦盛名所託，許多學生已知當粒子速率接近光速時，將產生時間膨脹與

長度收縮現象，即勞倫茲變換的基本概念。康普頓效應公式推導難度確實較高，但相信仍有學生有能力與興趣學習，非僅僅告知背起公式，扼殺其求知慾。

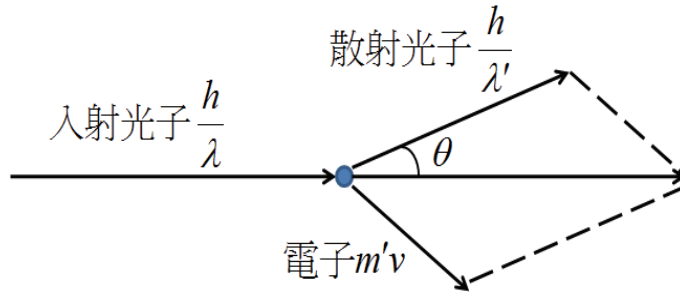
此篇文章，希望能提供自己與教師們，協助成為中學生深入理解康普頓效應與近代物理概念的鑰匙。

## 貳、康普頓散射公式的推導

入射 X 光光子波長  $\lambda$ ，散射光子波長  $m$ ，電子的靜止質量  $v$ ，碰撞獲得動能後速率為  $v$ ，質量變成  $m'$ ，散射光子在  $\theta$  方向，電子反衝角為  $\phi$ 。



圖一、康普頓效應中，光子及電子能量、動量示意圖



圖二、康普頓效應中，光子及電子動量示意圖

### 一、散射光子波長 $\lambda'$

X 方向動量守恆：

$$\frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + m'v \cos \phi = \frac{h}{\lambda'} \cos \theta + \gamma \times mv \cos \phi \quad (1)$$

Y 方向動量守恆：

$$0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - m'v \sin \phi = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta - \gamma \times mv \sin \phi \quad (2)$$

能量守恆：

$$\frac{hc}{\lambda} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda'} + m'c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + \gamma \times mc^2 \quad (3)$$

其中  $\gamma$  為勞倫茲因子

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \quad (4)$$

由動量守恆，餘弦定理可知電子動量為（見圖二）

$$(\gamma \times mv)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta \quad (5)$$

將(3)式同除  $c$ ，整理後平方得

$$(\gamma \times mc)^2 = (mc)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + 2hmc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \quad (6)$$

(6)式減去(5)式

$$\gamma^2 m^2 (c^2 - v^2) = m^2 c^2 + 2hmc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta) \quad (7)$$

(4)式  $\gamma$  代入(7)式，同除  $2hmc^2$

$$\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} = \frac{h}{mc \lambda \lambda'} (1 - \cos \theta) \quad (8)$$

(8)式整理後得康普頓散射公式

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (9)$$

### 二、電子反衝角 $\phi$

(Electron Recoil angle)

將(1)式與(2)式整理後相除得

$$\gamma \times mv \cos \phi = \frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta \quad (10)$$

$$\gamma \times mv \sin \phi = \frac{h}{\lambda'} \sin \theta \quad (11)$$

$$\tan \phi = \frac{\frac{h}{\lambda'} \sin \theta}{\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'} \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos \theta}$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{\sin \theta}{\frac{\lambda'}{\lambda} - \cos \theta} \right) \quad (12)$$

故

### 三、電子碰撞後速率 $v$

(4)式的  $\gamma$  代入(5)式

$$\frac{m^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2} = \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta \quad (14)$$

將(14)式整理後得電子碰撞後速率  $v$  為

$$v = \sqrt{\frac{c^2 \left( \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta \right)}{m^2 c^2 + \left(\frac{h}{\lambda'}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 - 2 \frac{h^2}{\lambda \lambda'} \cos \theta}} \quad (15)$$

### 參、數值代入與繪圖

電子的靜止質  $m = 9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$ ，卜朗克常數  $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$ ，光速  $c = 2.998 \times 10^8 \text{ m/s}$ ，並用數學軟體 Mathematic 繪圖討論。

#### 一、康普頓位移函數圖

(9) 式整理後為康普頓位移，為光子散射角  $\theta$  的函數

$$\Delta \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta) \quad (16)$$

(16) 式中  $\frac{h}{mc}$  是一個常數

$2.426 \times 10^{-12}$  公尺，稱為康普頓波長，圖三為康普頓位移函數圖。

當光子散射角為  $180^\circ$  時，康普頓位移最大，為  $4.852 \times 10^{-12}$  公尺。

圖四為入射 X 射線波長  $\lambda = 70.8 \text{ pm}$  照射石墨後得到四個不同的散射角  $\theta$  的實驗數據，其縱軸為散射光的強度，橫軸為散射光的波長。可得知康卜吞波長與入射光波長無關。

#### 二、電子反衝角 $\phi$ 函數圖

(12) 式為電子碰撞後反衝角  $\phi$ ，為入射光子波長  $\lambda$  與光子散射角  $\theta$  的函數，由動量守恆可知，當光子散射角  $\theta$  為  $0^\circ$  與  $180^\circ$  時，電子反衝角為  $0^\circ$ 。

圖五為光子波長  $\lambda_1 = 70.8 \text{ pm}$ ， $\lambda_2 = 24.3 \text{ pm}$ ， $\lambda_3 = 2.43 \text{ pm}$  下，電子反衝角函數圖。

圖五得知，當入射光子波長越短，電子的最大反衝角越小。

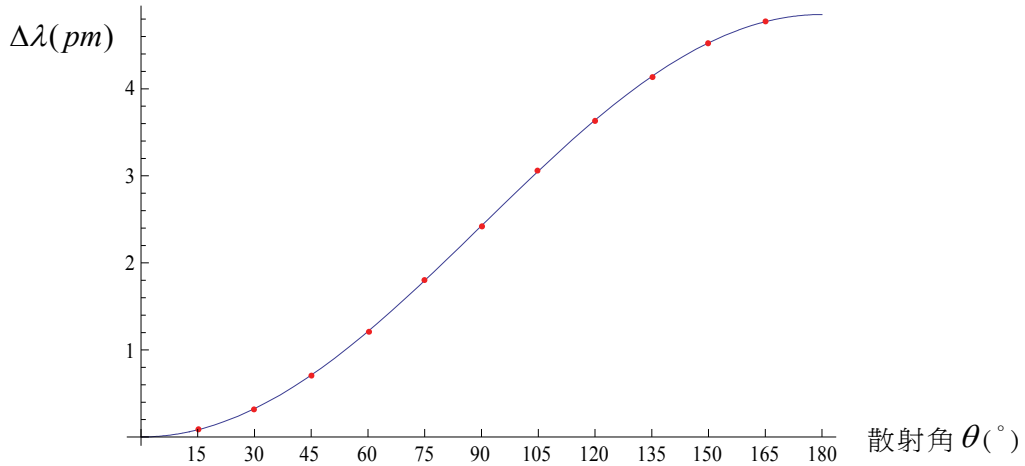
#### 三、電子速率 $v$ 函數圖

(15) 式為電子碰撞後速率  $v$ ，為入射光子波長  $\lambda$  與光子散射角  $\theta$  的函數，由相對論知，不論電子獲得多大的動能，其極限速率為光速。

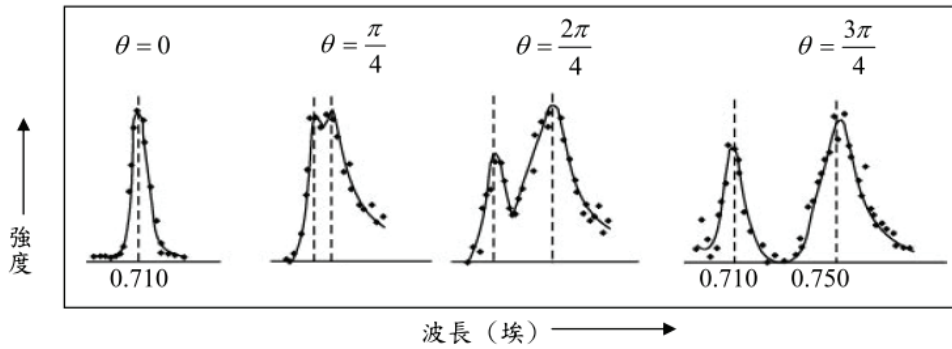
圖六為光子波長  $\lambda_1 = 70.8 \text{ pm}$ ， $\lambda_2 = 24.3 \text{ pm}$ ， $\lambda_3 = 2.43 \text{ pm}$  下，電子速率函數圖。

由圖六得知，當光子波長越短，光子散射角度大，電子獲得的速率(動能)越大。在康普頓散射實驗中，電子速率已經接近極限速率，碰撞後質量必須用勞倫茲因子轉換方可適用。

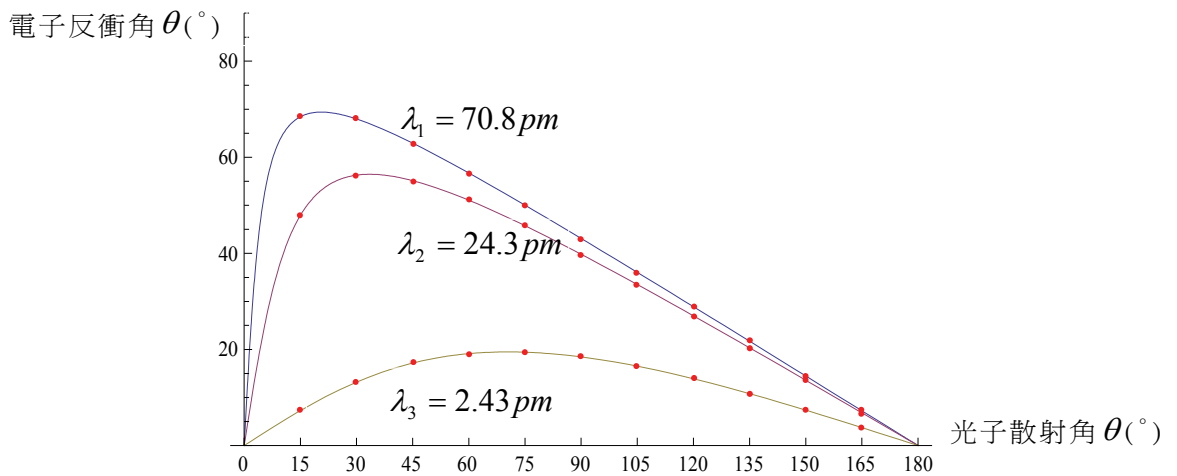
圖七為光子散射角  $\theta_1 = 180^\circ$ ， $\theta_2 = 90^\circ$ ， $\theta_3 = 45^\circ$ ，電子速率函數圖。



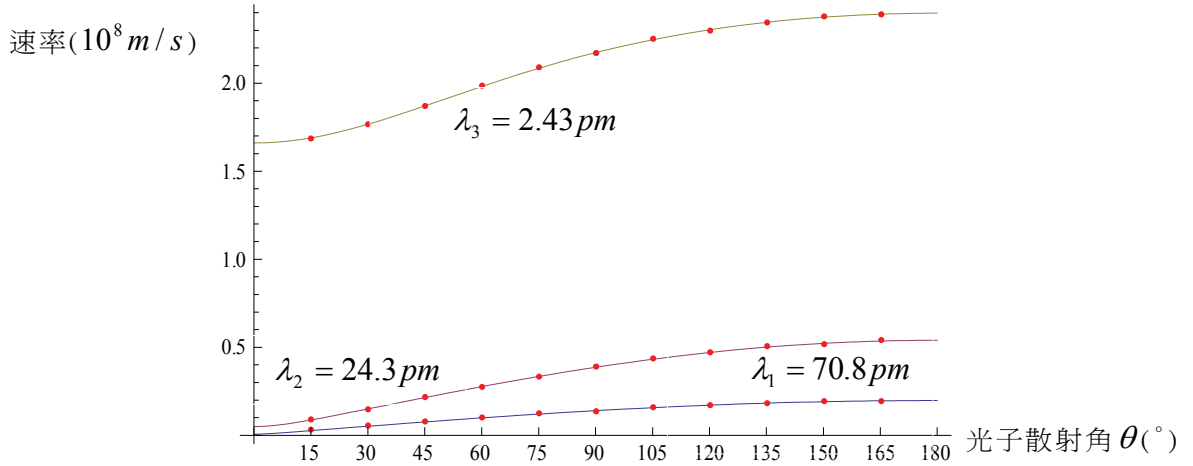
圖三、康普頓位移函數圖



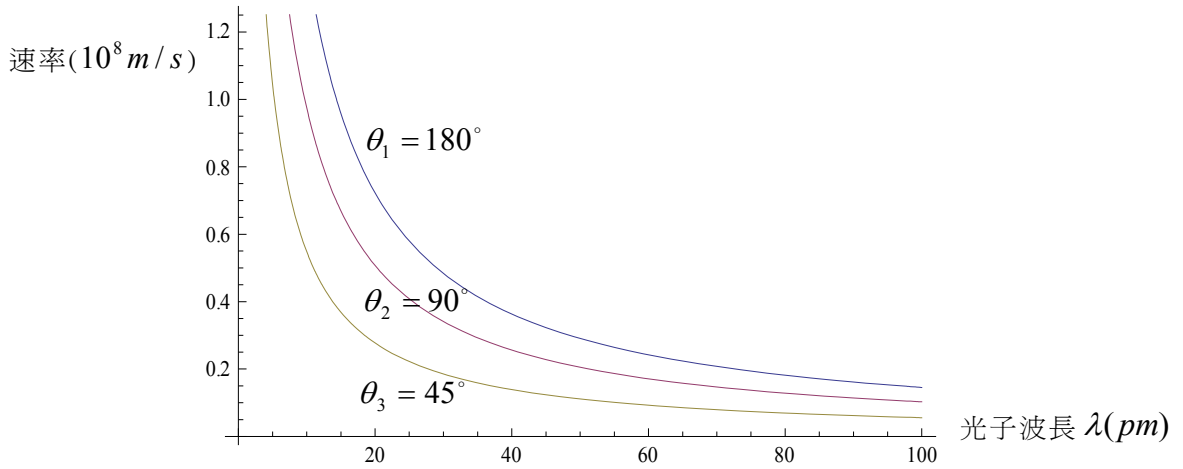
圖四、波長為 0.708Å 的 X 光照射在石墨上 4 組不同散射角的量測結果



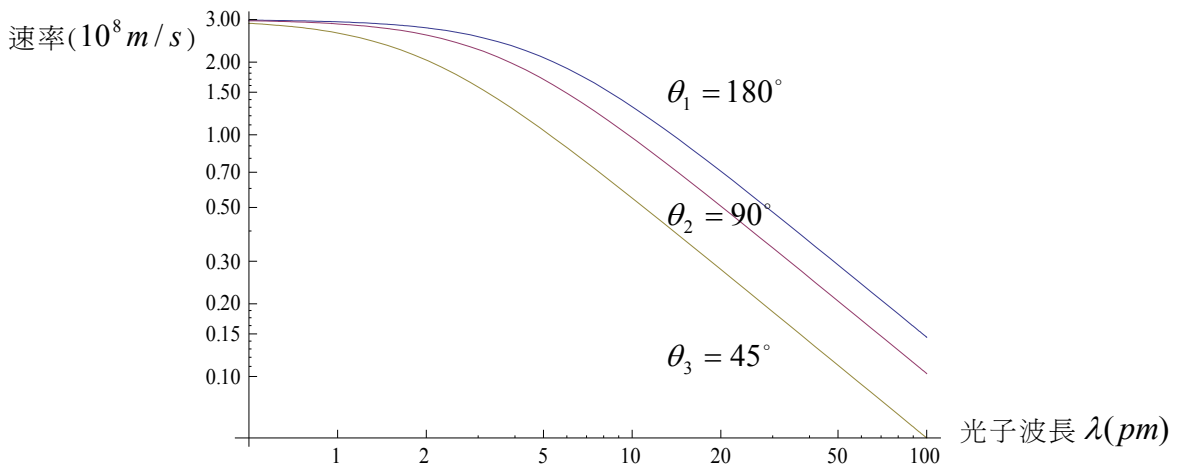
圖五、電子反衝角函數圖



圖六、電子速率-光子散射角函數圖



圖七、電子速率-光子波長函數圖-1



圖八、電子速率-光子波長函數圖-2

固定波長入射自由電子，光子散射角為  $\theta_1 = 180^\circ$  時，電子將獲得最大速率。

圖七中，入射光子波長小於  $10^{-11}$  公尺時，難以得知電子碰撞後的最大速率，故將  $x$  軸改以對數繪製圖八。

由圖八可知，當入射光子波長小於  $10^{-12}$  公尺 ( $\gamma$ -ray)，碰撞後電子速率接近極限速率  $c$ ，不論入射光子波長多小，電子速率均不會超過光速。

康普頓效應，若入射光子波長  $\lambda = 70.8 \text{ pm}$ ，光子散射角  $90^\circ$  與  $180^\circ$ ，碰撞後的電子速率分別為  $1.4 \times 10^7$  與  $2 \times 10^7 \text{ m/s}$ ，電子獲得動能高達  $570 \text{ eV}$  與  $1140 \text{ eV}$ ，遠高於物質對電子的束縛能，因此電子可視為自由電子來進行彈性碰撞，而非以光電效應討論之。

## 肆、結語

康普頓效應，最常討論的問題為：

- 散射光子的波長、頻率、動量與能量。
- 碰撞後電子的動量、動能與角度。
- 碰撞後電子的物質波波長。

相信學習科學是建立在好奇心與充分的理解之上。對多數中等學生而言，近代物理是難以捉摸理解的一門學問。而康卜頓效更不該僅流於考題公式的運用與計算，希望有能力的學生，能閱讀理解此文，將對康普頓效應、光電效應與近代物理理論能有更深一層的理解。

## 參考資料

- Physics: Principles and Problems, Paul W Zitzewitz, McGraw-Hill Education Co. (1999)
- 王正行 (2002)，近代物理學，北京大學出版社。
- Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J. (2005), Fundamentals of Physics (7th Edition, Extended), New York: John Wiley & Sons, Inc..
- 褚德三 (2008)，普通高級中學 選修物理 (下)，龍騰文化事業。