中學生通訊解題第六十三期題目解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
6301

已知 $\begin{cases} a+b=1 \\ \dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{2008-c}=\dfrac{1}{2008} \end{cases}$，則 $\dfrac{a^{2009}}{c^{2008}}+\dfrac{b^{2009}}{(2008-c)^{2008}}$ 化簡的最後結果為？

參考解答：

【方法一】

$\because \dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{2008-c}=\dfrac{1}{2008}=\dfrac{(a+b)^2}{c+(2008-c)}$，

$\therefore$ 同乘以 c＋（2008－c），可得 $a^2\dfrac{2008-c}{c}+\dfrac{b^2c}{2008-c}=2ab$，

同除以 c（2008－c），可得 $\left(\dfrac{a}{c}-\dfrac{b}{2008-c}\right)^2=0$，即 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{2008-c}$，

又 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{2008-c}=\dfrac{a+b}{c+(2008-c)}=\dfrac{1}{2008}$，故 $a=\dfrac{c}{2008}$，$b=\dfrac{2008-c}{2008}$，

則 $\dfrac{a^{2009}}{c^{2008}}+\dfrac{b^{2009}}{(2008-c)^{2008}}=\dfrac{1}{2008^{2008}}$

【方法二】

由柯西不等式

$$\left(\sqrt{c}^2+\sqrt{2008-c}^2\right)\cdot\left(\left(\frac{a}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{2008-c}}\right)^2\right)\geq\left(\sqrt{c}\cdot\frac{a}{\sqrt{c}}+\sqrt{2008-c}\cdot\frac{b}{\sqrt{2008-c}}\right)^2$$

$2008\cdot(\dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{2008-c})\geq(a+b)^2$，$\because a+\mathrm{b}=1$ $\therefore \dfrac{a^2}{c}+\dfrac{b^2}{2008-c}\geq\dfrac{1}{2008}$

由題設，上式等號成立，所以 $\dfrac{\dfrac{a}{\sqrt{c}}}{\sqrt{c}}=\dfrac{\dfrac{b}{\sqrt{2008-c}}}{\sqrt{2008-c}}$ ，$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{2008-c}$ ，

$\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{2008-c}=\dfrac{a+b}{c+2008-c}=\dfrac{1}{2008}$ ，故 $a=\dfrac{c}{2008}$ ，$b=\dfrac{2008-c}{2008}$ ，

則 $\dfrac{a^{2009}}{c^{2008}}+\dfrac{b^{2009}}{(2008-c)^{2008}}=\dfrac{1}{2008^{2008}}$

解題評註：

此題，可以看出同學的代數運算能力很好，值得嘉許。透過運算、因式分解得到 a、c， b、c 的關係式進而化簡得到答案。

問題編號 6302

將各位數字都不包含 0 的正整數列出成爲一個遞增數列，即 1, 2, 3, ⋯, 8, 9, 11, 12, ⋯. 試求此數列第 2008 項的數.。

參考解答：

因爲 0~999 共有 $9^3+9^2+9=819$ 個；

且 1000~1999 共有 9^3 個；

而 2000~2599 共有 $5\times9^2=405$ 個 。

由上述可得 $819+9^3+405+6\times9=2007$ 即 2669 爲第 2007 項。

故第 2008 項的數爲 2671。

解題評註：

本題屬於整數的排列問題，主要先觀察出數值規律性再運用排列組合性質加以計算。

問題編號 6303

求 $\dfrac{11\times12\times13\times\cdots\times20}{1\times3\times5\times\cdots\times19}$ 之值

參考解答：

$$\frac{11\times12\times13\times\cdots\times20}{1\times3\times5\times\cdots\times19}=\frac{11\times12\times13\times\cdots\times20\times2\times4\times\cdots\times20}{1\times3\times5\times\cdots\times19\times2\times4\times\cdots\times20}$$

$$=\frac{2^{10}(1\times2\times3\times\cdots\times19\times20)}{20!}$$

$$=\frac{2^{10}\cdot20\,!}{20\,!}=2^{10}=1024$$

解題評註：

本題屬於簡易計算問題，如果能充分運用到乘法交換律或因倍數相關性質，可以適度簡化計算過程。

問題編號 6304

在 6 列 4 行的方格內有 24 個小正方形，現在將這 24 個正方形塗黑 12 個，使得每一列有 2 個被塗黑，每一行有 3 個被塗黑，試問滿足這種要求的塗黑方式有幾種？

參考解答：

首先我們將行標籤爲 1、2、3、4，下圖（一）由上而下塗黑的是(1, 2)、(1, 2)、(1, 2)、(3, 4)、(3, 4)、(3, 4)；下圖（二）由上而下塗黑的是(1, 2)、(1, 2)、(3, 4)、(3, 4)、(1, 3)、(2, 4)；下圖（三）由上而下塗黑的是(1, 2)、(1, 3)、(1, 4)、(2, 3)、(2, 4)、(3, 4)：

×	×		
×	×		
×	×		
		×	×
		×	×
		×	×

圖（一）

×	×		
×	×		
		×	×
		×	×
×		×	
	×		×

圖（二）

×	×		
×		×	
×			×
	×	×	
	×		×
		×	×

圖（三）

這三個例子分別代表了三類滿足這種要求的塗黑方式，因此

（一）　$3\times\dfrac{6!}{3!\times3!}=60$

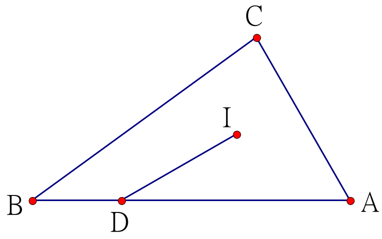
（二）　$3\times2\times\dfrac{6!}{2!\times2!}=1080$

（三）　6 ! = 720

60 +1080 + 720 = 1860（種）

問題編號 6305

如圖，Δ ABC 中，$\overline{CB}>\overline{CA}$，∠BAC ＝$60^0$，D 爲 $\overline{AB}$ 上一點，滿足 $\overline{CB}-\overline{CA}=\overline{BD}$，I 爲 Δ ABC 三條角平分線的交點，則∠IDA＝？



參考解答：

【方法一】

在 $\overline{CB}$ 上取點 A_1 使得 $\overline{CA_1}=\overline{CA}$，作 $\overline{IA_1}$、$\overline{IA}$、$\overline{CI}$、$\overline{BI}$。

①∵ $\overline{CA_1}=\overline{CA}$，∠1=∠2，$\overline{CI}=\overline{CI}$，

∴ Δ ACI ≅ Δ A_1CI（SAS）得 $\overline{AI}=\overline{A_1I}$

②∵ Δ $\overline{BD}=\overline{CB}-\overline{CA}=\overline{CB}-\overline{CA_1}=\overline{BA_1}$，

∠3＝∠4，$\overline{BI}=\overline{BI}$，

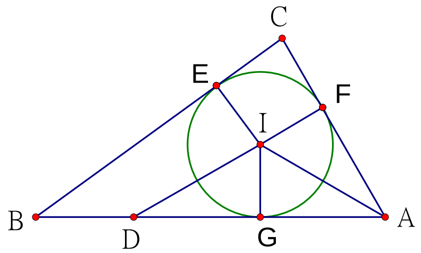
Δ A_1BI ≅ Δ DBI（SAS）　∴ $\overline{A_1I}=\overline{DI}$

③所以 $\overline{AI}=\overline{A_1I}=\overline{DI}$，故∠IDA＝∠IAD＝$\frac{1}{2}$∠DAC＝300

【方法二】

作 Δ ABC 的內切圓，分別切 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 於 E、F、G，作 $\overline{IE}$ 、 $\overline{IF}$ 、 $\overline{IG}$，

$\Rightarrow \overline{AF}=\overline{AG}$，$\overline{BE}=\overline{BG}$，$\overline{CE}=\overline{CF}$，



$\because \overline{CB}-\overline{CA}=\overline{BD}$

$\therefore \overline{GD}=\overline{GB}-\overline{BD}=\overline{GB}-\overline{CB}+\overline{CA}$

$=\overline{EB}-(\overline{CE}+\overline{EB})+\overline{CF}+\overline{AF}$

$=\overline{AF}=\overline{AG}$

$\overleftrightarrow{IG}$ 為 $\overline{AB}$ 之垂直平分線

解題評註：

此幾何題利用作補助線以及內心性質來解題。