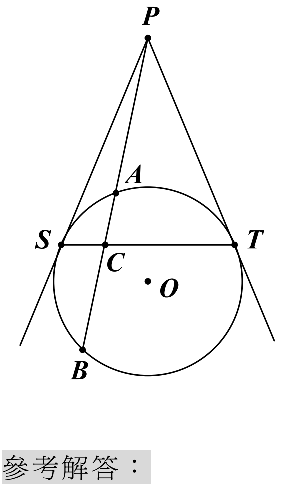
中學生通訊解題第六十四期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
6401

如下圖，已知 P 點是圓 O 外一點，$\overline{PS}$、$\overline{PT}$ 分別與圓 O 相切於 S 與 T，過 P 點作圓 O 的割線 PAB，交圓 O 於 A、B 兩點，與 $\overline{ST}$ 交於 C 點。證明：$\dfrac{1}{\overline{PC}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\overline{PA}}+\dfrac{1}{\overline{PB}})$



參考解答：

連 $\overline{PO}$ 交 $\overline{ST}$ 於 D，則 $\overline{PO}\perp\overline{ST}$。連 $\overline{SO}$，

作 $\overline{OE}\perp\overline{PB}$ 於 E，則 E 為 $\overline{AB}$ 中點，所以 $\overline{PE}=\dfrac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}$。

因為 C、E、O、D 四點共圓，所以 $\overline{PC}\cdot\overline{PE}=\overline{PD}\cdot\overline{PO}$。

又由 $\Delta SPD\sim\Delta OPS$，

可知 $\dfrac{\overline{PS}}{\overline{PD}}=\dfrac{\overline{OP}}{\overline{PS}}$，即

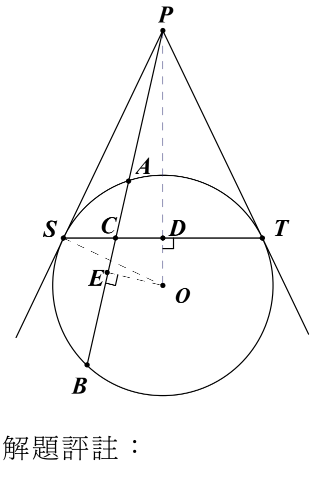
$\overline{PS}^2=\overline{PD}\cdot\overline{PO}=\overline{PC}\cdot\overline{PE}$

再由割線定理可得：$\overline{PS}^2=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$，

所以 $\overline{PC}\cdot\overline{PE}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$，即

$\overline{PC}\cdot\dfrac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}=\overline{PA}\cdot\overline{PB}$

因此 $\dfrac{1}{\overline{PC}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{\overline{PA}}+\dfrac{1}{\overline{PB}})$。



解題評註：

本題主要是考查同學們對於幾何知識中的圓與直線關係的熟悉情形，參與徵

答的 7 位同學，多數皆為滿分 7 分，顯示參與徵答的同學對於這些概念也相當了解。

問題編號
6402

已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，a 為正整數，$c\ge 1$，$a+b+c\ge 1$，方程式 $ax^2+bx+c=0$ 有兩個小於 1 的不相等正根，則 a 的最小值為何？

參考解答：

【方法一】

設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的兩根為 α、β，且 $0<\alpha<\beta<1$，則

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$

$a+b+c=f(1)=a(1-\alpha)(1-\beta)\ge 1$

$c=f(0)=a\alpha\beta\ge 1$

$\because\quad a(1-\alpha)=-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$，

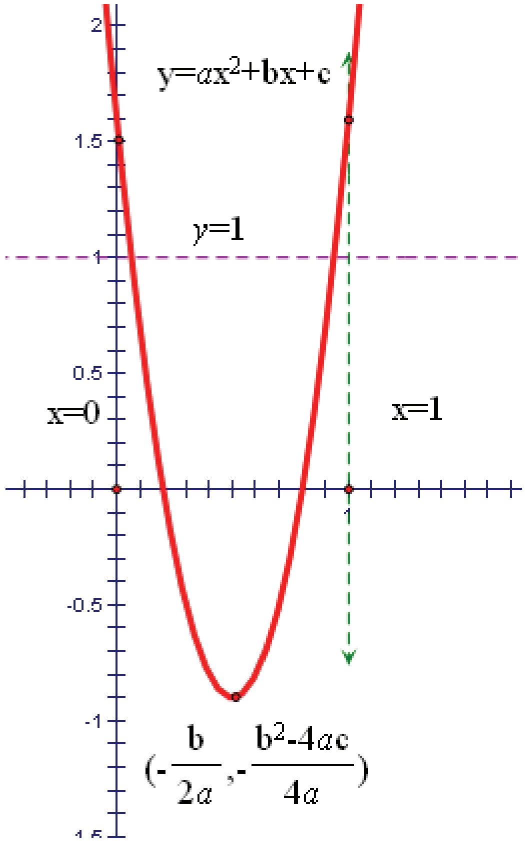
$\beta(1-\beta)=-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\le\frac{1}{4}$，又 $\alpha<\beta$

$\therefore 1\times 1\le a\alpha\beta a(1-\alpha)(1-\beta)<\frac{1}{16}a^2$

$\Rightarrow\frac{1}{16}a^2>1$，$a>4$，$\therefore a\ge 5$

取 $f(x)=5(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{5})$，符合條件

a 的最小值為 5



【方法二】

以二次函數的圖形的特性來解題，此題為：a 為正整數，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形的頂點坐標 $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ 中，

$-\frac{b}{2a}$ 介於 0 和 1 之間，$-\frac{b^2-4ac}{4a}$ 小於 0，且 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與直線 $x=0$，$x=1$ 的交點 $(0,c)$，$(1,a+b+c)$ 均在 $y=1$ 線上或上方。而 a 值決定拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 的開口大小，a 值愈大，開口愈小，a 值要夠大才能滿足此題的條件，求 a 的最小值。

由以上說明，得

$$\begin{cases} a \in N \\ c \geq 1 \cdots\cdots\cdots(1) \\ a+b+c \geq 1 \cdots\cdots(2) \\ 0 < -\dfrac{b}{2a} < 1 \cdots\cdots(3) \\ b^2 - 4ac > 0 \cdots\cdots(4) \end{cases}$$

①由(3)，$0 > b > -2a \Rightarrow b^2 < 4a^2$，

由(4)，$b^2 > 4ac \Rightarrow 4a^2 > b^2 > 4ac$，

$\therefore a > c$

②由(2)，$a + (c-1) \geq -b$，$-b > 0$

平方，

$a^2 + 2(c-1)a + (c-1)^2 \geq b^2 > 4ac$

$\Rightarrow c^2 - 2(a+1)c + (a-1)^2 > 0$

$\Rightarrow c > a + 1 + 2\sqrt{a}$ 或 $c < a + 1 - 2\sqrt{a}$

$\because a > c$ $\therefore c < a + 1 - 2\sqrt{a} \cdots\cdots(*)$

又 $c \geq 1$，得 $a + 1 - 2\sqrt{a} > 1$，

$\Rightarrow a > 4$ $\therefore a \geq 5$

③取 $f(x) = 5(x - \frac{1}{2})(x - \frac{3}{5})$，符合條件

a 的最小值為 5

注意：當 $a = 5$ 時， 代入(*)式中，得 $c < 6 - 2\sqrt{5}$，所以 $c = 1$，並不是 a 有最小值 5 時的唯一條件。

解題評註：

1. 【方法一】用根的意義和二次式配方來解題；【方法二】用二次函數的圖形的特性來解題。
2. 本題參與徵答的 5 位同學中有 4 位，直接取 $c = 1$ 去算，但是此題 $c = 1$ 並不是 a 有最小值 5 時的唯一條件，詳見『方法二』。
3. 於本題中當你算出 $a \geq 5, a \in N$，並不能就此下結論 a 有最小值 5，而是要舉出一個滿足條件的 $a = 5$ 的二次函數，也就是 $a \geq 5$ 的等號成立。

問題編號
6403

有 15 塊規格完全相同的巧克力，每塊至多被分成兩小塊（可以不等分），這些全部的巧克力可以平均分給 n 名同學，對於下列 4 個值：7,11,13,16，n 可以取其中的哪幾個數值？

參考解答：

【方法一】把每塊巧克力當作 1 單位。

①當 $n = 7$ 時，4 塊巧克力都分成 $\frac{1}{7}$ 和 $\frac{6}{7}$，4 塊巧克力都分成 $\frac{2}{7}$ 和 $\frac{5}{7}$，4 塊巧克力都分成 $\frac{3}{7}$ 和 $\frac{4}{7}$，另 3 塊不分。則

$15=4(\frac{1}{7}+\frac{6}{7})+4(\frac{2}{7}+\frac{5}{7})+4(\frac{3}{7}+\frac{4}{7})+3\times 1$

$=(1+4\times\frac{1}{7}+2\times\frac{2}{7})+2(1+2\times\frac{4}{7})+2(\frac{3}{7}+2\times\frac{6}{7})+(2\times\frac{2}{7}+2\times\frac{3}{7}+\frac{5}{7})+3\times\frac{5}{7}$

②當 $n=11$ 時，2 塊巧克力都分成 $\frac{k}{11}$ 和 $\frac{11-k}{11}$ （$k=1,2,3,4,5$），另 5 塊不分。則

$15=2(1+\frac{4}{11})+2(1+\frac{1}{11}+\frac{3}{11})+(1+\frac{2}{11}+\frac{2}{11})+2(\frac{5}{11}+\frac{10}{11})+2(\frac{6}{11}+\frac{9}{11})+2(\frac{7}{11}+\frac{8}{11})$

③當 $n=13$ 時，2 塊巧克力都分成 $\frac{k}{13}$ 和 $\frac{13-k}{13}$ （$k=1,2,3,4,5,6$），另 3 塊不分。則

$$15=(1+2\times\frac{1}{13})+2(1+\frac{2}{13})+2\times(\frac{3}{13}+\frac{12}{13})+2\times(\frac{4}{13}+\frac{11}{13})+2\times(\frac{5}{13}+\frac{10}{13})$$
$$+2\times(\frac{6}{13}+\frac{9}{13})+2\times(\frac{7}{13}+\frac{8}{13})$$

④當 $n=16$ 時，每一塊巧克力都分成 $\frac{1}{16}$ 和 $\frac{15}{16}$ 。則

$15=15\times\frac{1}{16}+15\times\frac{15}{16}$

所以 n 可以取 7,11,13,16。

注意：分法並不是唯一。

【方法二】台北市東門國小邱同學的作法

①當 $n=7$ 時，每人分 $15\div 7=\frac{15}{7}=2\frac{1}{7}=1+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}$

$$15個\begin{cases}3個分\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\\3個分\frac{5}{7}+\frac{2}{7}\\9個不分\end{cases}$$

$1+1+\frac{1}{7}$ 有 3 人；$1+\frac{2}{7}+\frac{6}{7}$ 有 3 人；$\frac{5}{7}\times 3$ 有 1 人。

所以當 $n=7$ 時，可以。

②當 $n=11$ 時，每人分 $\frac{15}{11}=1\frac{4}{11}=\frac{7}{11}+\frac{8}{11}$

$$15個\begin{cases}5個分\frac{7}{11}+\frac{4}{11}\\5個分\frac{8}{11}+\frac{3}{11}\\5個不分\end{cases}$$

$1+\frac{4}{11}$ 有 5 人；$\frac{7}{11}+\frac{8}{11}$ 有 5 人；$\frac{3}{11}\times 5$ 有 1 人。所以當 $n=11$ 時，可以。

③當 $n=13$ 時，每人分 $\frac{15}{13}=1\frac{2}{13}=\frac{11}{13}+\frac{4}{13}=\frac{9}{13}+\frac{6}{13}$

$$15個\begin{cases}4個分\frac{7}{13}+\frac{6}{13}\\4個分\frac{8}{13}+\frac{5}{13}\\4個分\frac{9}{13}+\frac{4}{13}\\3個分\frac{10}{13}+\frac{3}{13}\end{cases}$$

$\frac{7}{13}+\frac{8}{13}$ 有 4 人；$\frac{6}{13}+\frac{9}{13}$ 有 4 人；$\frac{5}{13}+\frac{10}{13}$ 有 3 人；$\frac{5}{13}+\frac{4}{13}+\frac{3}{13}\times 2$ 有 1 人；

$\frac{4}{13}\times 3+\frac{3}{13}$ 有 1 人。 所以當 $n=11$ 時，可以。

④當 $n=16$ 時，每一塊巧克力都分成 $\frac{1}{16}$ 和 $\frac{15}{16}$。則　$15=15\times\frac{1}{16}+15\times\frac{15}{16}$

所以當 $n=11$ 時，可以。

所以 n 可以取 7,11,13,16。

解題評註：

1. 本題參與徵答的同學大都作答的很完整，只有一位同學未作答完成。
2. 大部分作答者的作法都是採用巧克力逐一平分給 n 名同學的方法。
3. 有一位同學除了寫出 n 可以取 7,11,13,16，還寫出當 $n<15$ ($n\in N$)時，都可以平分。將題目延伸思考，這是很好的學習方法。