
學童的小數數線概念

劉曼麗^{1*} 楊明樺²

¹ 國立屏東教育大學 數理教育研究所

² 高雄市立內惟國民小學

壹、前言

在數學教學上，教師通常會透過許多的表徵進行教學活動，其中數線表徵在學習整數、分數以及小數的內容中都會出現(教育部，2003)，所以使用數線是「數」學習中的重要材料(劉秋木，1996)。而了解學童的小數數線概念對教師而言也就顯得重要了。因此，本文擬先從一份有關學童在小數試題表現的研究中擇取部分重要的結果，針對學童在小數數線上的答題表現說明學童在學習小數概念的理解情形。該研究使用所發展的試題，於民國93年3月針對由北部、中部、南部的城鄉學校中所選取的513位五年級學童進行施測。而這些學童接受的是九年一貫暫行綱要的數學領域課程。另外，我們還想進一步深入了解學童的小數數線概念，故再從筆者(第二作者)所任教學校中，隨機抽取五年級的其中二班共64名學童，先進行筆試，再根據筆試結果挑選訪談對象。最後，透過訪談結果的呈現和分析以期幫助現場的教師對學童的小數數線概念有進一步的了解。

*為本文通訊作者

貳、小數數線試題簡介

此份小數的研究中有關小數數線的試題，依照作答形式可分成「寫小數」和「標小數」兩類。寫小數的試題是寫出在數線上箭頭↑所指的小數，而標小數的試題是用箭頭↑標出小數在數線上的位置。小數數線試題的設計是依據「起始點」和「數線分割情形」來考量的。試題中的「起始點」可分成「從原點起」和「未從原點起」，而「數線分割情形」則分成「十等分割」和「非等十分割」。小數數線的試題共有6題。在「寫小數」部分，「從原點起」和「未從原點起」各有2題；而在「標小數」部分，「從原點起」和「未從原點起」各有1題。茲將小數數線試題內涵與分佈整理如表1。

參、學童在小數數線試題的答題結果

學童在小數數線試題答題結果整理如表2。

從表2中可知學童在寫小數及標小數的答題情形。整體而言，全部試題6題中有4題學童的答對率在八成以上，顯示學童在小數數線試題的作答表現還算不錯。

學童在「標小數」的平均答對率高於「寫小數」。學童在各題答對率由高到低為試題 6(起始點是 0.7 和 0.1 被十等分割)→試題 5(起始點是 0 和 1 被十等分割)→試題 1(起始點是 0 和 1 被十等分割)→試題 2(起始點是 0.7 和 0.1 被十等分割)→試題 3(起始點是 40 和 1 被十等分割)→試題 4(起始點是 0 和 1 被五等分割)。在標小數部分，學童的平均答對率為九成多，表現很好。至於在寫小數部分，學童的平均答對率只有七成五左右，表現則差強人意。其中，學童在試題 3 的答對率只有六成左右，表現不甚理想；而在試題 4 的答對率還不到六成，是所有題目中答對率最低的，顯示學童在數線非十等分割的問題是有困難

的。學童在「從原點起」的平均答對率和「未從原點起」的差距不大。但若將非等十分割的試題 4 排除，可發現學童在試題 3「未從原點起」的答對率有明顯低於其他試題。

一、在寫小數部分

試題 1~4 主要是想了解學童在不同的數線形式下，學童對於寫小數的解題情形。試題 1 和試題 4 數線形式的參考點是由原點起，而試題 2 和試題 3 數線形式的參考點是未從原點起。在答題結果中有加註*者為正確答案，而學童答題表現以答對率呈現。學童各項錯誤答案所佔比例不高，故我們不再分開呈現答錯率，但會呈現主要錯誤答案。

表 1 小數數線試題內涵與分佈

作答形式	編號	起始點	數線分割情形
寫小數	1	0	1 被十等分割
	4	0	1 被五等分割
	2	0.7	0.1 被十等分割
	3	40	1 被十等分割
標小數	5	0	1 被十等分割
	6	0.7	0.1 被十等分割

表 2 學童試題答題結果

數線類型 \ 作答形式	寫小數		標小數		平均答對率
	試題	答對率	試題	答對率	
從原點起	試題 1	87%	試題 5	95.5%	80.2%
	試題 4	58%			
未從原點起	試題 2	86%	試題 6	96.5%	81.8%
	試題 3	63%			
平均答對率	74%		96%		

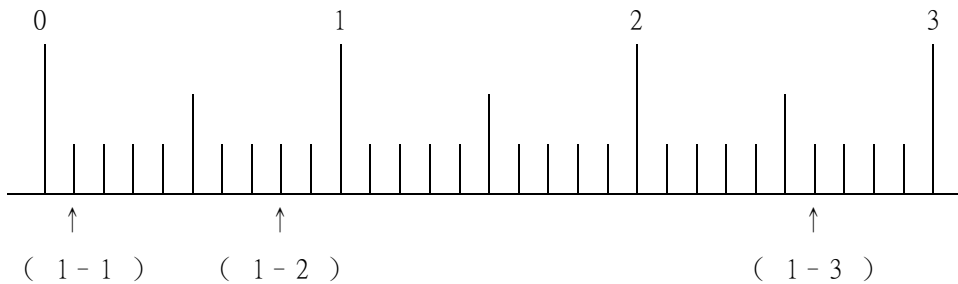
(一) 數線形式從原點起

在試題 1 中，數線是從「原點 0」開始且單位「1」已被十等分割。此題包括 1-1~1-3 等三小題，答對率分別為 89%、88%、85%，整題平均答對率為 87%，顯示學童知道「1」被十等分割後，每一小間隔為 0.1。

對於試題 1-1 和 1-2，學童錯誤的主要原因有兩種。第一種是將每一小間隔 0.1 當成 1，因此會在試題 1-1 將答案寫成 1、在試題 1-2 寫成 8。第二種是將每一小間

隔 0.1 當成 0.01，因此會在試題 1-1 將答案寫成 0.01、在試題 1-2 寫成 0.08。對於試題 1-3，學童的答對率是本題中較低的。學童錯誤的主要原因也有兩種。第一種是學童忽略參考點「2」，而將其當作「0」，並以 0.1 直接點數間隔數。因此，學童在參考點之後的第 6 個間隔處就寫成 0.6；或以 0.01 直接點數間隔數，因而寫成 0.06。第二種是學童不清楚參考點 2 的意義，並將每一小間隔的大小當成 1 或 0.01，因此學童會寫成 26 或 0.26。

試題 1 在數線上寫出箭頭 ↑ 所指的 小數



試題 1-1 答題結果

答 案	*0.1	1	0.01	其他
百分率	89%	11%		

*者為正確答案

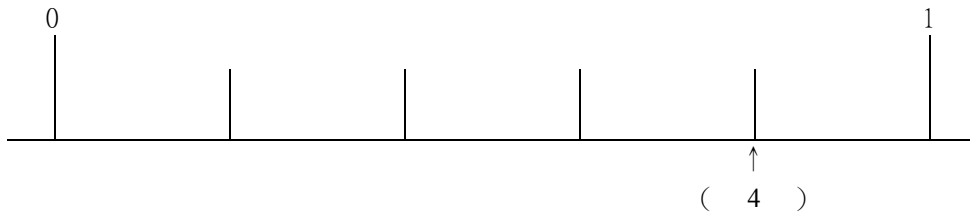
試題 1-2 答題結果

答 案	*0.8	8	0.08	其他
百分率	88%	12%		

試題 1-3 答題結果

答 案	*2.6	26	0.26	0.6	0.06	其他
百分率	85%	15%				

試題 4 在數線上寫出箭頭 ↑ 所指的 **小數**



試題 4 答題結果

答案	*0.8	0.4	4	0.04	0.1	其他
百分率	58%	42%				

在試題 4 中，數線從「原點 0」開始且「1」被五等分割，學童答對率為 58%，是學童在寫小數所有題目中表現最糟的。本題是非等十分割的問題，1 被平分成五等份，每一等份為 0.2。五年級學童尚未學習整數除以整數商為小數的概念，但學童可將分數與小數的概念相互連結，透過等值分數 $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$ 再將 $\frac{8}{10}$ 轉換成 0.8，進而成功解題。可是學童在分數和小數的概念上連結並不好，約有四成的學童無法成功解題。D' Entremont(1991)研究美國一群表現不佳的高中生，發現學童在處理數線每一單位是五等份的問題也是有困難的。

對於試題 4，學童錯誤的主要原因是無法判斷每一小間隔所代表的大小，習慣以 1、0.1 或 0.01 當作每一小間隔的大小，再點數間隔來作答。本題學童如從起始點 0 開始，以 1、0.1 或 0.01 點數間隔數，就會在起始點 0 後第 4 個間隔處寫成 4、0.4 或 0.04。從錯誤答案中也發現有部分學童

的錯誤原因是把每一個間隔當成 0.1，離參考點還差 1 個間隔就寫成 0.1。

如果學童忽略被等分割的份數，把每一小間隔都當作 0.1，再點數間隔數，在試題 1-1 和 1-2 是可以寫出正確答案的，但在此題的數線條件下則會遭受挫敗。這也是造成試題 1 和試題 4 答對率相差懸殊的原因。

在小數的符號中，一個單位被等分成多少等分是隱含在位數中，佔多少等分是由小數點後的部份顯示，整體被分成 10 的幕次方等分，才能以小數表示(劉曼麗，2005a)。從本題中的錯誤答案(0.4 或 0.04)，可知學童未能了解到小數符號和等十幕次分割的關係。學童剛開始在學習一位小數概念時，教材中所提的問題情境都是以平分成 10 片的披薩圖或平分成 10 格的量杯刻度，請學童畫出 0.8 個披薩或在量杯上畫出 0.2 杯的高度。在這樣的佈題下，學童既使不清楚 0.8 的意義，在多次的練習下而知道 0.8 個披薩就是要畫 8

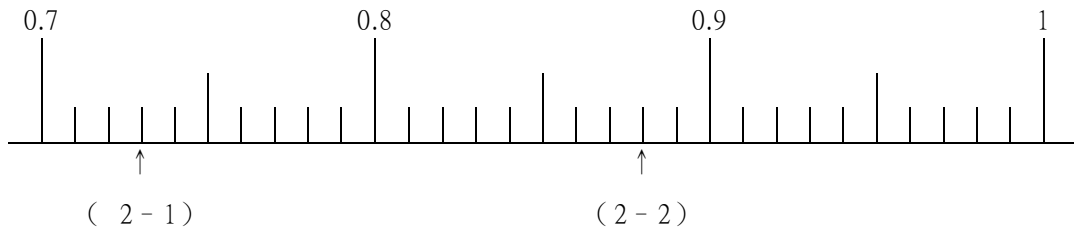
片，0.2 杯就是在量杯上畫 2 格。所以學童在本題中只注意到的是在數線上從起始點 0 開始點數 4 格間隔數就是 0.4，而未考慮到數線上單位 1 是否被十等分割。即使教師在教學上不斷強調 $0.1 = \frac{1}{10}$ ，學童也只是注意到那畫出的 1 份，而忽略了單位 1 是否被等分成十份，所以在教學活動中應以非等十分割的圖形對照來突顯等十分割的重要性(劉曼麗、侯淑芬，2005)。本題的數線形式為單位 1 被五等分割，對於學童是否能先判斷單位 1 被十等分割後的每一小間隔才是代表 0.1 的概念發揮了檢視的效果。

(二) 數線形式未從原點起

在試題 2 中，包括 2-1 和 2-2 兩小題，平均答對率為 86%，表現還不差。學童需從相鄰的兩數先確定大間隔為 0.1，再從被十等分割的大間隔判斷每一等份(每 1 小格)代表 0.01。另外，學童尚需考量數線上所給定起始點，才能得到正確的答案為 0.73 和 0.88。

對於試題 2，學童錯誤的主要原因有兩種，第一種是忽略參考點 0.7(0.8)，而把 0 當作起始點，以 0.01 開始點數間隔數。因此，在參考點後第 3 個(8 個)間隔處就寫成 0.03(0.08)。第二種是不清楚 0.1 被十等分後為 0.01。誤把每一間隔當作 0.1，從參考點 0.7 開始數 3 個間隔數就寫成 1.0；從參考點 0.8 開始數 8 個間隔數就寫成 1.6。

試題 2 在數線上寫出箭頭 ↑ 所指的小數



試題 2-1 答題結果

答 案	*0.73	3	0.3	0.03	1.0	1	其他
百分率	86%	14%					

試題 2-2 答題結果

答 案	*0.88	18	8	1.8	0.8	0.08	0.18	1.6	其他
百分率	86%	14%							

在陳文利(2001)探討四年級學童小數迷思概念的結果中，也發現學童會一開始就將細分格的數線認定都是從 0 數起，或認為數線十格內的每一格一定是 0.1。另外，也有學童同時犯以上兩種錯誤，在試題 2-1 中，忽略起始點 0.7，把 0 當成起始點，並且把每一間隔 0.01 當作 1 或 0.1。因此，從起始點開始數到第 3 個間隔處就寫成 3 或 0.3。同樣地，在試題 2-2 中，學童忽略參考點 0.8，把 0.8 當成 0 開始，並且把每一間隔 0.01 當作 1 或 0.1。因此，從參考點開始數到第 8 個間隔處就寫成 8 或 0.8。這也和梁惠珍(2002)在四年級小數診斷教學研究中，學童會將十等分割後的小單位視為 0.1(數線給定的參考點為 0 和 0.1)，而未察覺被分割的單位是否為 1 的結果類似。還有的學童是先忽略參考點 0.8，直接把起始點 0.7 當作 0，把每一間隔 0.01 當作 1 或 0.1。因此，從起始點開始點數 18 個間隔就寫成 18 或 0.18。

從試題 1 和試題 2 的數線形式都是十等分割，學童需根據數線上給定的兩個參考點，判斷每一等份的結果為 0.1 或是 0.01。從學童的錯誤答案中，除了忽略參考點造成的答題錯誤外，也可以發現學童對於分割後的結果是 0.1 或是 0.01 無法掌握。杜建台(1996)的研究中發現，學童反應在小數與數線對應關係時，未能引用分數思考，將小數與分數視為獨立系統而無關係。在小數教學時，都是先透過分數的意義來幫助學童了解小數的意義，除了強調小數和分數之間的關係(1 被十等分割後

每一等份是 0.1 和 $0.1 = \frac{1}{10}$ ；1 被百等分割

後每一等份是 0.01 和 $0.01 = \frac{1}{100}$)需作加

強外，也要進一步透過整數的十進位記數系統，讓學童了解 1、0.1 以及 0.01 彼此的關係，也就是說 10 個 0.1 等於 1 和 10 個 0.01 等於 0.1。教師透過豐富的情境(連續量或離散量)，引導學童使用小數符號來表示單位被等分割後的結果和了解 1、0.1 以及 0.01 彼此的關係。然而當學童面對小數數線時，和其他連續量情境(如披薩、量杯、積木或彩帶)的情況又有些許不同，學童透過視覺即能判斷一塊披薩和一條積木，但是數線要先標示出基本的參考點數值才具有意義。學童要能先注意到所給定相關的參考點數值，才能得知數線中的起始點與透過兩個參考點間等分割的情況以判斷每一間隔的大小，進而能標示出數線上其餘各點的小數數值。

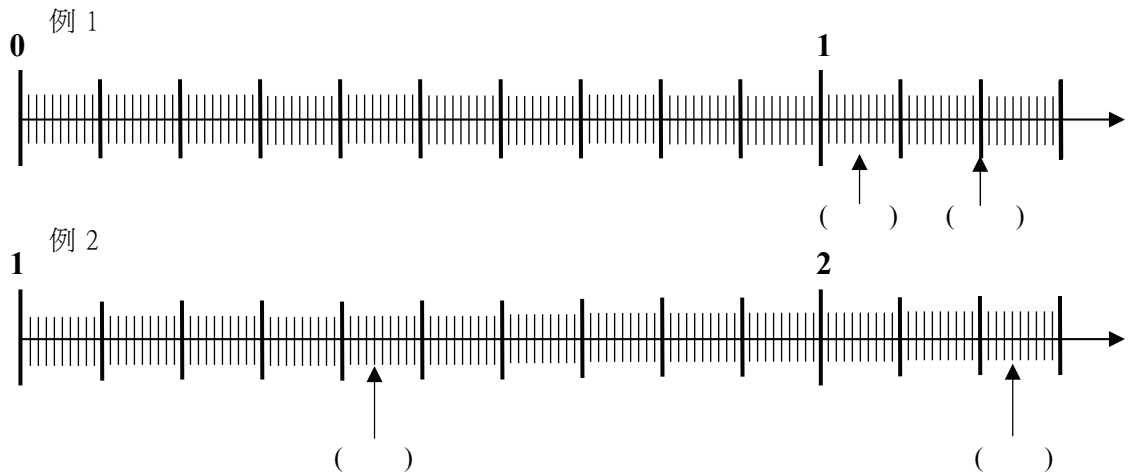
小數和分數都與等分與合成結果的概念相關，小數則強調單位被十的幕次方等分割。而試題 2 是請學童寫出的小數符號為二位純小數，數線上的條件是 0.1 被十等分割後每一間隔為 0.01。從學童在此題的答對率 86% 來看，表現還算不錯。那麼，若將試題改成請學童寫出的小數符號為二位帶小數，而數線上的條件改為參考點是 0~1 被百等分割(見例 1)，數線上每一小間隔雖然還是 0.01，則學童的表現又會如何呢？學童可能從數線上給定的參考點 0 和 1 間十等分割的情況判斷每一大間

隔是 0.1 後，寫出 0.1 的位置；接著，再從 0 和 0.1 間等十分割的情況判斷每一小間隔是 0.01。或者學童可能從 0 和 1 間百等分割的情況就直接判斷每一小間隔是 0.01。如果，我們再進一步改變數線上給定參考點是未從原點起(見例 2)，學童還需要掌握到從數線給定兩個參考點間等分割的情況以判斷每一間隔的大小。因此，我們可以再探討學童在這兩題條件下的答題結果，並與試題 2 相比較，相信應有更多的新發現。

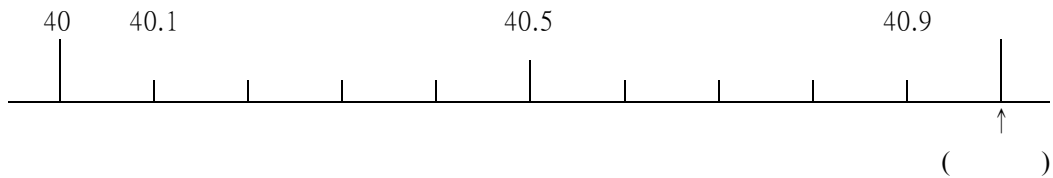
在試題 3 中，學童的答對率只有 63%，

表現卻比試題 2 差。從數線上給定的兩點 40 及 40.1 即可判斷每一小格代表 0.1。

對於試題 3，學童錯誤的主要原因是將小數視為整數來處理。所以把 40.9 中小數點後當成整數處理，9 進 1 就是 10，此由學童在試題 3 寫成 40.10 顯示。或者 40.9 後多出 1 格，也就是 40.9 加上 0.1，9 進 1 就是 10，40 再加上 10，此由學童在試題 3 寫成 50、50.0 顯示。在陳文利(2001)的研究中，指出學童在小數序列的迷思概念主要為以整數的序列寫法來寫小數(如 0.8、0.9→0.10)，一遇進位時就容易出錯。



試題 3 在數線上寫出箭頭 ↑ 所指的 **小數**



試題 3 答題結果

答 案	*41	*41.0	40.10	50	50.0	其他
百分率	63%		37%			

當學童有此錯誤的想法後進而也會忽略數線上所給予的條件，而受到十進位的影響，只關注在40.9後多出1格。即使有小數點，學童也視之不理，當成整數的序列來處理。另外，又受到熟記逢9進1的算則，學童以本身學習整數時熟悉的程序性知識來處理小數問題，對於小數符號的意義就拋之腦後。

由此題結果可以看出學童除了不易掌握小數意義外，且極易受到整數學習的影響。在劉曼麗(2005b)對於學童不同位數小數加減的理解情形的研究中也有類似的發現，當學童處理小數加減整數時，一旦沒

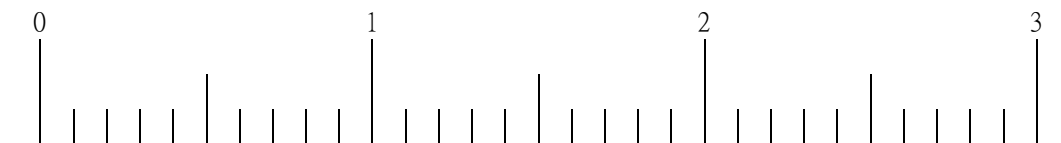
有小數點可以對齊時，學童只好回歸到熟悉的整數直式計算方式(向右對齊)。在教學中，老師若不斷耳提面命的強調算則，讓學童只具備程序性知識的了解，而不引導學童概念性知識的理解，學童便容易以本身熟悉的解題方式來尋求答案，當然就會產生後續許多錯誤的迷思概念。

二、在標小數部分

試題5和試題6主要想了解學童在不同的數線形式下，學童對於標小數的解題情形。試題5數線形式的參考點是由原點起，而試題6數線形式的參考點是未從原點起。

(一) 數線形式從原點起

試題5 用↑指出0.3和2.4的位置。



5-1 標 0.3 的答題結果

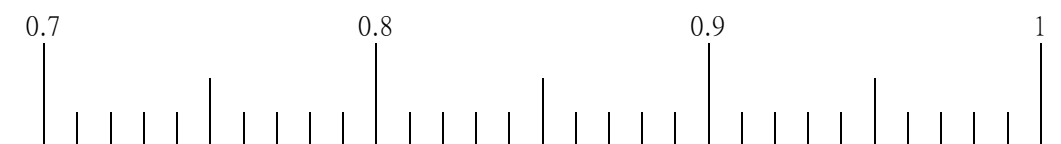
答 案	位置正確	位置錯誤
百分比	95%	5%

5-2 標 2.4 的答題結果

答 案	位置正確	位置錯誤
百分比	96%	4%

(二) 數線形式未從原點起

試題6 用↑指出0.72和0.83的位置。



6-1 標 0.72 的答題結果

答 案	位置正確	位置錯誤
百分比	96%	4%

6-2 標 0.83 的答題結果

答 案	位置正確	位置錯誤
百分比	97%	3%

試題 5 數線形式的參考點是由原點起，學童的答對率為 95.5%。而試題 6 數線形式的參考點未從原點起，學童的答對率也有 96.5%。從試題 5 和試題 6 的數線形式來看，學童並不會受到起始點是否從原點起而影響作答。從學童的作答結果來看，在「標小數」部分的表現，學童的答對率皆在九成以上，表現都不錯。

在這一一份有關小數數線的試題，學童在答題的表現上，整體的答對率高於八成以上。在「寫小數」部分，大部分的學童能寫出數線上箭頭↑所指的正確小數；而在「標小數」部分，絕大多數的學童能標出小數在數線上的正確位置。那麼筆試的答題表現好是否就能代表學童對於小數概念是清楚的？或許學童答題時對於小數概念存有不當的解釋及錯誤的想法，我們是無法單從筆試的答對率得知的，所以我們想進一步藉由訪談再深入了解學童的小數概念。

肆、學童在小數數線試題的答題和訪談情形

我們先從筆者所任教學校中，隨機抽取五年級的其中二班共 64 名學童進行筆試。茲將學童在小數數線試題答題的結果先整理如表 3。

由表 3 可知 64 名學童在試題的答題情形。學童在「標小數」的答對率高於「寫小數」；在「十等分割」的答對率高於「非十等分割」。這和表 1 中學童的作答情形大致相同。在「標小數」部分，學童在試題 5 和試題 6 的答對率皆為九成多，表現很好。在「寫小數」部分答對率由高到低為試題 1→試題 2→試題 4→試題 3。學童在試題 1 的答對率為九成多，表現很好，在試題 2 的答對率為八成多，表現也不錯；但在試題 3 和試題 4 的答對率卻只有七成左右。試題 3 和試題 4 仍是學童在所有題目中表現最不理想。

其次，我們根據學童的作答情形進行訪談，以便深入了解學童在小數數線答題正確的解題策略以及答題錯誤時的想法。訪談內容是針對筆試試題的全部題目，讓學童逐題說明選答的原因，以能深入了解學童在答題時答對或答錯的可能原因。

表 3 64 名學童試題答題的結果

	寫小數		標小數		平均答對率
	從原點起	試題 1	98%	試題 5	
	試題 4	72%			
未從原點起	試題 2	88%	試題 6	98%	85%
	試題 3	69%			
平均答對率	82%		98%		

為了使訪談對象能包括各試題作答有誤以及考慮訪談對象能包括不同的數學程度的學童，我們和該班導師討論，共同挑選出數學高程度的學童(大姿、小羽及小涵)3名，中程度的學童(芸芸、安安和小仁)3名，以及低程度的學童(小宏、小尹、小宥和阿德)4名，共計10名學童做為我們訪談的樣本。在訪談後，將訪談錄音轉譯成逐字稿，作為我們分析的資料。以下為學童在各題的訪談結果。

一、試題1的訪談結果

(一) 答題正確案例舉隅

大姿所採取的解題策略為連結分數與小數的概念，知道 $0.1 = \frac{1}{10}$ ，進而解題成功。訪談結果如下：

筆者：第1題的0.1是怎麼寫的？

大姿：0~1有10等份，其中一等份就是

$$\frac{1}{10}，就等於0.1。$$

筆者：0.8是怎麼寫的？

大姿：10等份裡有8等份。

筆者：哪裡有10等份？

大姿：從0~1中，然後10等份裡有8

$$等份就是\frac{8}{10}，就等於0.8。$$

芸芸所採取的解題策略為將1被十等分割後，每一小間隔為0.1，再進行點數，進而解題成功。訪談結果如下：

筆者：第1題的0.1是怎麼寫的？

芸芸：0~1分成10等份，每一小格就是

0.1。

筆者：那麼0.8是怎麼寫的？

芸芸：從0開始數，0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7、0.8。

筆者：那麼2.6是怎麼寫的？

芸芸：從2開始數，2.1、2.2、2.3、2.4、2.5、2.6。

(二) 答題錯誤案例舉隅

小羽在試題1-3中忽略參考點2，而把0當作起始點，並以0.1直接點數間隔數。所以在參考點之後的第6個間隔處就寫成0.6。訪談結果如下：

筆者：為什麼這裡(試題1-3)寫0.6？

小羽：因為每一小格是0.1，所以從這裡開始(指著數線上2.1的位置)0.1、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6。

二、試題2的訪談結果

(一) 答題正確案例舉隅

大姿所採取的解題策略為將0.1被十等分割後，每一小間隔為0.01，進而解題成功。訪談結果如下：

筆者：這裡為什麼寫0.88？

大姿：因為0.8~0.9差0.1(手指著數線上參考點0.8、0.9)，0.1再平分成10份，1格是0.01，然後有8格，就是0.08，在0.8加上0.08就是0.88。

筆者：什麼是0.01？

大姿：一百分之一。

筆者：什麼是一百分之一？

大姿：把1平分成100份。

小宏在試題 2-1 中從參考點 0.7 後，以 0.01 進行點數間隔數來作答。他根據數線給定的參考點為一位小數 0.7 和 0.8，就判斷數線上每一小格的大小為二位小數 0.01。他雖能成功解題，卻無法說明 0.01 的意義。訪談結果如下：

筆者：那我們來看試題 2，這一格你寫 0.73，為什麼你寫 0.73？

小宏：沉思~~，因為這邊 0.7 了(指著數線上給定的參考點 0.7)，所以 0.71、0.72、0.73。

筆者：那麼這一格代表多少？從這裡到這裡(指著數線上的間隔線 0.7 到 0.71)

小宏：0.01。

筆者：為什麼是 0.01？

小宏：因為這邊有 0.7，所以空一格(指著題目上 0.7 的百分位位置)。

筆者：那什麼是 0.01？

小宏：百分位。

筆者：還有呢？

小宏：沉思~~

(二) 答題錯誤案例舉隅

安安在試題 2-1 和 2-2 中誤把每一間隔當作 0.1，從參考點 0.7 開始數 3 個間隔數就寫成 1；從參考點 0.8 開始數 8 個間隔數就寫成 1.6。訪談結果如下：

筆者：第 2 題為什麼這裡寫 1？(試題 2-1)？

安安：因為它到 10 就會變成 1。

筆者：這是什麼意思？

安安：就是要進 1 位。

筆者：那你怎麼數的？

安安：就從這裡開始(0.7)，0.8、0.9、1(手指著數線點數)。

筆者：那一小格是多少？

安安：0.1。

筆者：那這裡 1.6 是怎麼寫的？(試題 2-2)

安安：0.8、0.9、1.0、1.1、1.2、1.3、1.4、1.5、1.6(手指著數線點數)。

小丑在試題 2-2 中忽略參考點 0.8，而把 0 當作起始點，以 0.01 開始點數間隔數。因此，在參考點後第 8 個間隔處就寫成 0.08。他根據數線給定的參考點為一位小數 0.8，就判斷數線上每一小格的大小為二位小數 0.01。但他卻無法說明 0.01 的意義。訪談結果如下：

筆者：為什麼這裡(試題 2-2)寫 0.08？

小丑：因為從這裡開始數(指著數線 0.81 的位置)0.01、0.02、0.03、0.04、...、0.07、0.08(手指著數線點數)。

筆者：那一小格是多少？

小丑：0.01。

筆者：為什麼是 0.01？

小丑：指著數線上的參考點 0.8，每一小格會比它還小，所以是 0.01。

筆者：什麼是 0.01？

小丑：...不知道。

三、試題 3 的訪談結果

(一) 答題正確案例舉隅

小涵能知道符號的意義，40.9 的 9 代

表 9 個 0.1，透過 10 個 0.1 和 1 相等，進而解題成功。訪談結果如下：

筆者：我們看第三題，妳怎麼知道是 41？

小涵：因為 40.9 來就是 41.0，9 要加 1 等於 10，10 要進位，所以就變成 41。

筆者：那這個 9 代表什麼意思？

小涵：9 個 0.1。

筆者：那這個 9 加 1 的 1 什麼意思？

小涵：就是 9 個 0.1 加 1 個 0.1 就變成 1.0。那麼 40 再加 1.0 就是 41.0，再把 0 去掉就是 41。

筆者：那妳怎麼知道一小格是多少？

小涵：40 來就跳 40.1，所以一小格是 0.1。

(二) 答題錯誤案例舉隅

小宥在試題 3 中受逢 9 進 1 的算則影響。從 40 開始以 0.1 依序點數，接著 9 進 1 就是 10，最後答案寫成 50。訪談結果如下：

筆者：為什麼第 3 題這裡寫 50？

小宥：因為 40，這裡 40.9，然後跳過來就是 50，這邊寫 40，所以這裡就是 50。

筆者：這邊寫 40(手指著數線)，然後...

小宥：40、40.1、40.2、3、4、5、6、7、8、9，9 再來就是 50。

四、試題 4 的訪談結果

(一) 答題正確案例舉隅

大姿所採取的策略為使用等值分數的概念，將每一小格 $\frac{1}{5}$ 先轉換成 $\frac{2}{10}$ 再轉

換為 0.2，進而解題成功。訪談結果如下：

筆者：為什麼第 4 題這裡 0.8？

大姿：因為 1 平分成 5 份，1 份就是 $\frac{1}{5}$

$=\frac{2}{10}$ ，1 格就是 0.2，有 4 格就

是 0.8。

小涵所採取的策略為使用改變數線的形式，把 1 被五等分割改變成 1 被十等分割後，每一小間隔為 0.1，進而解題成功。訪談結果如下：

筆者：那為什麼要寫 0.8？

小涵：就把中間這裡想像多一條線(手指著數線起始點 0 和 0.2 的位置)，就把這一條當作 0.1。

筆者：然後呢？

小涵：那是跳著的(手指著數線的刻度線)，只是去掉那一橫。如果在中間加一條線，那麼 0~1 就分成 10 份，每一條線就是 0.1。

筆者：那為什麼這裡是 0.8？

小涵：因為在第 8 份就是 0.8。

(二) 答題錯誤案例舉隅

小尹在試題 4 中從起始點 0 開始，以 0.1 點數間隔數，就會在起始點 0 後第 4 個間隔處寫成 0.4。他根據數線給定的參考點為整數 0 和 1，就判斷數線上每一小格的大小為一位小數 0.1。但他卻無法說明 0.1 的意義。訪談結果如下：

筆者：為什麼這裡寫 0.4？

小尹：因為 0、0.1、0.2、0.3、0.4。

筆者：所以一格是多少？

小尹：0.1。

筆者：為什麼寫 0.1？

小尹：指著數線上的參考點 0 和 1。

筆者：那什麼是 0.1？

小尹：不知道？

小宏在試題 4 中誤把數線上每一個間隔當成 0.1，在離參考點 1 前的 1 個間隔處就寫成 0.9。他根據數線給定的參考點為整數 1，就判斷數線上每一小格的大小為一位小數 0.1。但他卻無法說明 0.1 的意義。訪談結果如下：

筆者：那我們來看第 4 題，你寫多少？

小宏：0.9。

筆者：你怎麼判斷是 0.9？

小宏：因為這邊是 1(手指著數線上的參考點 1 的位置)，所以這邊應該是 0.9(手指著數線上 0.8 的位置)，因為靠近 1。

筆者：這題一小格代表多少？

小宏：0.1 吧！

筆者：那你怎麼判斷這一格是 0.1？

小宏：因為這邊是 1(指著數線上給定的參考點 1)。

筆者：什麼是 0.1？

小宏：... (想很久)，搖頭。

五、試題 5 的訪談結果

(一) 答題正確案例舉隅

大姿所採取的解題策略為連結分數與小數的概念，對於 $0.1 = \frac{1}{10}$ 非常清楚，進而成功解題。訪談結果如下：

筆者：為什麼這裡標 0.3？

大姿：1 被分成 10 份，其中的 3 份。

筆者：為什麼這裡標 2.4？

大姿：2~3 中間有 10 格，1 格等於 $\frac{1}{10}$ ，

有 4 格等於 $\frac{4}{10} = 0.4$ ，然後 2 再

加 0.4 就是 2.4。

小宏在試題 5-1 中從起始點 0 開始，以 0.1 點數間隔數，就會在 0 後第 3 個間隔處，在數線上標出 0.3 的位置。他根據數線給定的參考點為整數 0 和 1，就判斷數線上每一小格的為一位小數 0.1。訪談結果如下：

筆者：來看第 5 題，請你標出 0.3 和 2.4 的位置。為什麼 0.3 你標在這個位置上？

小宏：因為這邊是 0.1、0.2、0.3。

筆者：那你怎麼判斷這一格是 0.1？

小宏：因為這邊是 1(指著數線上給定的參考點 1)。

(二) 答題錯誤案例舉隅

阿德誤解題意，以為 \uparrow 要標示在兩個小數之間，造成在數線上只有標示出 1 個 \uparrow 。在訪談過程中，阿德馬上了解到自己看錯題目，並能指出正確的位置。訪談結果如下：

筆者：在第 5 題中，老師題目要你標出 0.3 和 2.4，為什麼標在這裡？(只有標一個 \uparrow ，在數線 1.5 上)？

阿德：0.3 在這裡、2.4 在這裡(手指的數線都正確指出 0.3 和 2.4)。

筆者：那為什麼一開始標在這裡？(指著試卷學童標示數線的 1.5 上)。

阿德：喔！看錯了，我以為要指出它們的中間。

六、試題 6 的訪談結果

(一) 答題正確案例舉隅

大姿所採取的解題策略為將「0.1」被十等分割後，每一小間隔為 0.01，進而成功解題，訪談結果如下：

筆者：為什麼這裡標 0.72？

大姿：0.7~0.8 差 0.1，再把 0.1 分成 10 份，1 格等於 0.01，有 2 格就是 0.02，這裡是 0.7 再加 0.02 就是 0.72。

筆者：為什麼這裡標 0.88？

大姿：0.8~0.9 差 0.1，再把 0.1 分成 10 份，1 格等於 0.01，有 3 格就是 0.03，這裡是 0.8 再加 0.03 就是 0.83。

小仁在試題 6-1 中從參考點 0.7 開始，以 0.01 點數間隔數，就會在 0.7 後第 2 個間隔處，在數線上標出 0.72 的位置。他根據數線給定的參考點為一位小數 0.7，就判斷數線上每一小格的為一位小數 0.01。他雖能成功解題，卻無法說明 0.01 的意義。訪談結果如下：

筆者：那麼 0.72 是怎麼標出來的？

小仁：數格子。0.71、0.72。

筆者：那這一小格代表多少？

小仁：0.01。

筆者：為什麼是 0.01？

小仁：因為這裡(手指著 0.7)，所以是 0.01？

筆者：0.01 是什麼？

小仁：搖頭(不知道)。

(二) 答題錯誤案例舉隅

阿德誤解題意，以為↑要標示在兩個小數之間，造成在數線上只有標示出 1 個↑。在訪談過程中，阿德馬上了解到自己看錯題目，並能指出正確的位置。訪談結果如下：

筆者：那麼第 6 題，為什麼要標在這裡？

(只有標一個↑，在數線 0.78 上)？

阿德：這個也是看錯了，我以為要指出它們的中間？

筆者：那麼 0.72 和 0.83 應該標在哪裡？

阿德：0.72 在這裡、0.83 在這裡(手指的數線都正確指出 0.72 和 0.83)。

我們從訪談中可以知道解題成功的學童對於小數與分數有其概念性知識的理解，能利用等值分數、 $0.1 = \frac{1}{10}$ 、 $0.01 = \frac{1}{100}$

以及 0.1 再等分成十份是 0.01 非常的清楚，並且對於數線上所給定的參考點和等分割後的結果皆能掌握，能判斷數線上的每一小格為 0.1 或是 0.01，進而成功解題。

但是我們從訪談中也發現有些學童(小宏、小仁及小尹)在不清楚 0.1 及 0.01 的概念下，卻也能成功解題。這些學童在答題時是根據數線上所給定的參考點是兩個連續整數，就先判斷數線上每一小格是 0.1，或數線上所給定的參考點是兩個連續一位小數，就判斷數線上每一小格是

0.01，然後再以 0.1 或 0.01 進行點數間隔的方式決定答案。當學童採用此程序性知識的解題策略時，雖然對於十等分割的試題(試題 1、試題 2、試題 5、試題 6)能成功解題，一旦在面對數線上單位 1 是非十等分割的試題 4 時，這些學童由於對小數數線缺乏概念性知識的理解就有可能遭受失敗。作答情形也顯示學童在試題 4 的答對率明顯的下降許多。

教師在評量後通常不會個別訪談學童的情況下，學童在試題表現上的高答對率很容易讓教師誤認學童的學習是沒有問題的。對此給予教師在評量上的一些建議：在小數數線試題上，不論作答形式為「寫小數」或「標小數」，在數線分割情形可同時呈現「十等分割」和「非十等分割」的問題，也可再進一步變換所給定參考點的數值。從不同型式的小數數線檢驗學童的概念，相信應更深入了解學童的學習情況。

伍、結語

本文透過 6 個問題和學童的答題結果來說明學童在數線上的小數概念。整體而言，答對率在八成以上。學童在「標小數」的答對率高於「寫小數」；在「十等分割」的答對率高於「非十等分割」。在「寫小數」部分，學童常犯的錯誤有忽略數線所給定的參考點及猜測單位被等分割後的結果兩種。此外，學童對於非十等分割的數線題目，較無法判斷單位被等分割後的結果。從數線試題中也可發現小數序列會受整數

的影響。學童在小數符號背後的意義及分數和小數連結的概念不清楚下，當數線上參考點數值和每一間隔等分割的情況有所改變後，對於判斷每一間隔的代表值 1、0.1 或 0.01 就會產生迷思或錯誤。

在學童的訪談中發現，學童假如具備正確的小數概念，並能掌握數線上的特徵(參考點及間隔分割後結果)，就能夠解題成功。值得注意的是有些學童會利用參考點數值，猜測數線上每一小格所代表的值是 0.1 或 0.01，在他們解題經驗中，對於十等分割的試題參考點若是兩個連續整數就把每一小格當成 0.1，參考點若是兩個連續一位小數就把每一小格當成 0.01，再透過點數就能解題成功。對此，我們追問學童為什麼每一小格是 0.1 以及什麼是 0.1 的問題，或為什麼每一小格是 0.01 以及什麼是 0.01 的問題時，這些學童就無法根據數線上兩個參考點間被十等分割後的結果來回答。所以單從筆試的答對率中，就會覺得學童在小數數線的答題表現還算不錯。但我們再經由訪談後，才赫然發覺學童在小數的概念性知識是非常薄弱的。

學童的小數概念若不清楚，在本試題中大部分試題仍能回答正確。所以建議教師在教學評量中，除了十等分割的問題之外，應同時呈現數線是非十等分割的問題，或者是給定參考點是 0~1 或 1~2 百等分割的問題(數線上的大間隔表示 0.1 和小間隔表示 0.01)，才能了解學童是否能掌握 1、0.1 以及 0.01 之間的關係，也較能發揮評量的功能。

小數概念的建立和分數與整數的學習皆有關係，在教學和學習上都是具有挑戰性的。然而數線同時擁有數字符號和視覺結合的特性，相較於其他表徵(積木、圖形)更加抽象。所以當小數概念和數線互相結合時，對於學童能否在不同數學概念間的連結則更具有檢視的效果。

陸、參考文獻

- 杜建台(1996)：國小中高年級學童小數概念理解之研究。台中市：國立台中師範學院國民教育研究所碩士論文(未出版)。
- 梁惠珍(2002)：國小四年級小數診斷教學之研究。屏東市：國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文(未出版)。
- 教育部(2003)：九年一貫數學學習領域課程綱要。台北市：教育部。
- 陳文利(2001)：國小四年級學童小數迷思概念之研究。屏東市：國立屏東師範學院數理教育研究所碩士論文(未出版)。
- 劉秋木(1996)：國小數學科教學研究。台北市：五南圖書出版有限公司。
- 劉曼麗(2005a)：小數診斷教學研究。科學教育學刊，13，29-52。
- 劉曼麗(2005b)：學生的小數概念。科學教育月刊，276，2-10。
- 劉曼麗和侯淑芬(2005)：小數的教學活動。科學教育月刊，277，25-32。
- D' Entremont, Y. M. (1991). *The reconstruction of decimal knowledge in young adult*. Unpublished doctoral dissertation University of Alberta, Edmonton, Alberta.