碗的擺盪週期

賴奕帆

臺北市私立薇閣高級中學

日常生活中常見倒反放置的安全帽，若要計算出其放置時的那微小幅度的擺盪週期，將用到多層面高中物理的內容，包含質心、重心、轉動慣量、力矩與簡協運動等，仔細思考，可發覺這些基礎概念都是高二物理上學期（物理(上) 第二、四、五章）的教學內容，目前坊間參考書籍的題型大至固定，學生們面對物理問題大多只能單方面的理解，而未能融會貫通，希望能由類似的題型來提升自己與同學們的物理視野。

此文章主要目的是要計算出有厚度半球形碗體在光滑平面下的擺盪週期，如圖一所示，以下分爲三個步驟的依次計算之。

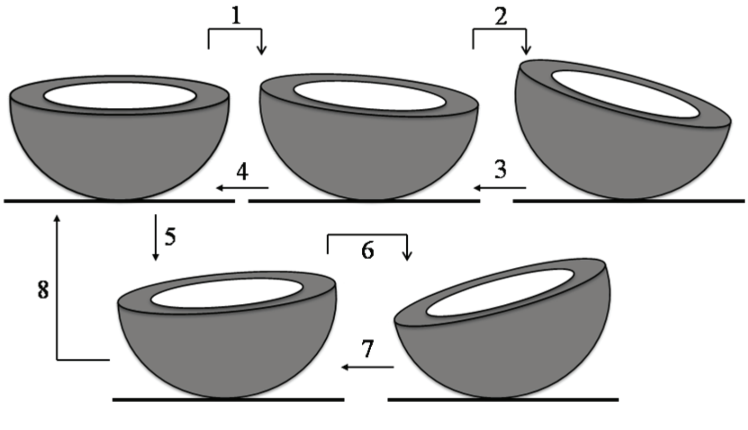
壹、碗的重心

首先計算碗體的重心，重心符合兩個力學的要求（物理(上) 第二章）:

(1) 重心所受重力=所有質點所受重力之合力=物體的總重量

(2) 重心所受的力矩=所有質點所產生的力矩和(對任一轉軸而言)

碗擺盪過程中，受到碗重力產生力矩作用而擺動，因此在解析擺盪週期前，需先計算出碗的重心。由基本公式知，半球面的面積爲 $2\pi R^2$，半球體積爲 $\frac{2}{3}\pi R^3$ 。



圖一、碗的擺盪週期(由 1→8)

一、半球體的重心

碗體重心的計算略嫌困難，因此先由較簡單的半球體重心計算開始。如圖二(a)所示，半徑 R、密度已知半球對稱，重心必在 z 軸上，若圖中之 O 點為 z 軸座標原點，則

$$\text{半球體重心}=\frac{\int_0^R \rho\times\pi(R^2-z^2)zdz}{\int_0^R \rho\times\pi(R^2-z^2)dz}=\frac{\int_0^R \pi R^2 z-z^3 dz}{\int_0^R \pi R^2-z^2 dz}=\frac{\frac{1}{2}\pi R^4-\frac{1}{4}\pi R^4}{\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3}=\frac{3}{8}R$$

二、無厚度薄碗的重心

同理，薄碗的重心在 z 軸之中。如圖二(b)所示，但薄碗重心積分較為技巧，先思考半碗面積 $A=2\pi R^2$ 之證明。

表面積相當於弧長 ds 乘 $2\pi y$ (繞 z 軸旋轉)

$$dA=2\pi yds$$

$$A=\int_0^R 2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}dz$$

因為 $y=\sqrt{R^2-z^2}$

$$\frac{dy}{dz}=-z\frac{1}{\sqrt{R^2-z^2}}\Rightarrow\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=\frac{z^2}{R^2-z^2}\Rightarrow 1+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2=\frac{R^2}{R^2-z^2}\text{代入A}$$

$$\mathrm{A}=\int_0^R 2\pi\sqrt{R^2-z^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-z^2}}dz=\int_0^R 2\pi\sqrt{R^2}dz=2\pi R^2$$

可推知薄碗的重心為

$$\text{薄碗重心}=\frac{\int_0^R \rho\times 2\pi\sqrt{R^2-z^2}z\sqrt{\frac{R^2}{R^2-z^2}}dz}{\rho\times 2\pi R^2}=\frac{\int_0^R 2\pi zRdz}{2\pi R^2}=\frac{2\pi R\times\frac{1}{2}R^2}{2\pi R^2}=\frac{1}{2}R$$

三、碗的重心

已知半球體重心為 $\frac{3}{8}R$，薄碗重心為 $\frac{1}{2}R$，若為有厚度碗，其重心應該在 $\frac{3}{8}R$ 與 $\frac{1}{2}R$ 之間。

可利用高二上物理**重心位移的公式**（物理(上) 第二章）來解出重心位置。

圖二(c)所示，碗身半徑為 R_2，由碗心挖掉半球體的厚度為 R_1，碗厚度為 $d=R_2-R_1$

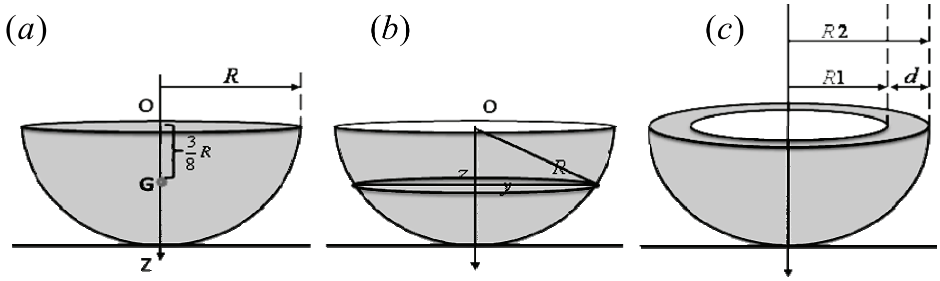
$$\frac{2}{3}\pi R_2^{\ 3}\times\rho\times\frac{3}{8}R_2=\frac{2}{3}\pi R_1^{\ 3}\times\rho\times\frac{3}{8}R_1+\frac{2}{3}\pi(R_2^{\ 3}-R_1^{\ 3})\times\rho\times\frac{3}{8}G$$

$$\Rightarrow \text{碗重心}G=\frac{\frac{1}{4}\pi(R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4})}{\frac{2}{3}\pi(R_2^{\ 3}-R_1^{\ 3})}=\frac{3}{8}\times\frac{R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4}}{R_2^{\ 3}-R_1^{\ 3}}=\frac{R_2^{\ 4}-(R_2-d)^4}{R_2^{\ 3}-(R_2-d)^3}$$

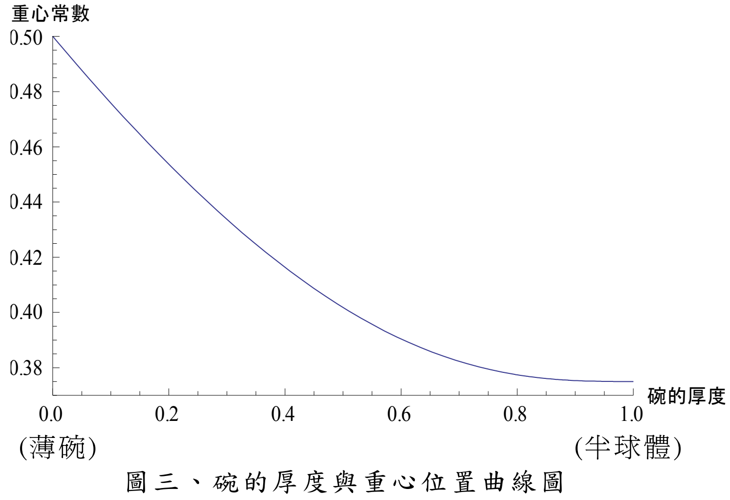
也可由數學積分方法得到相同的答案

$$\text{碗重心}G=\frac{\int_{R_1}^{R_2}\frac{z}{2}\times 2\pi z^2dz}{\int_{R_1}^{R_2}\rho\times 2\pi z^2dz}=\frac{\left.\frac{1}{4}\pi z^4\right|_{R_1}^{R_2}}{\left.\frac{2}{3}\pi z^3\right|_{R_1}^{R_2}}=\frac{\frac{1}{4}\pi(R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4})}{\frac{2}{3}\pi(R_2^{\ 3}-R_1^{\ 3})}=\frac{3}{8}\times\frac{R_2^{\ 4}-R_1^{\ 4}}{R_2^{\ 3}-R_1^{\ 3}}=\frac{3}{8}\times\frac{R_2^{\ 4}-(R_2-d)^4}{R_2^{\ 3}-(R_2-d)^3}$$

利用數學軟體繪出圖三驗證 $G=\frac{3}{8}\times\frac{R_2^{\ 4}-(R_2-d)^4}{R_2^{\ 3}-(R_2-d)^3}=K_1\times R_2$，$K_1$ 定義爲重心常數，圖三橫軸爲碗的厚度，由 0(薄碗)至 1(半球體)，縱軸爲碗重心位置。由圖可知碗的重心常數 K_1 介於 0.5(薄碗) 與 0.375(半球體) 之間，計算所得公式無誤。



圖二、半球、薄碗、碗的示意圖



圖三、碗的厚度與重心位置曲線圖

貳、計算碗的轉動慣量

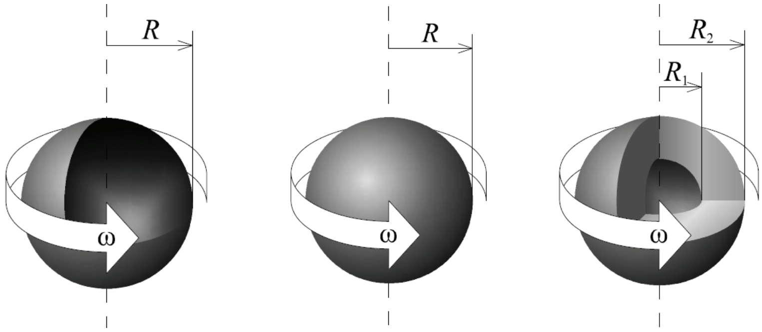
一、球體的轉動慣量

球體轉動慣量可由極座標積分求得，但極座標積分難度較高，在此不詳述其證明過程。由普通物理書籍中可得以中心轉軸之轉動慣量（Halliday, 2005），見圖四。

(a) 薄球殼轉動慣量＝ $\frac{2}{3}MR^2$

(b) 球體轉動慣量＝ $\frac{2}{5}MR^2$

(c) 內半徑 R_1、外半徑 R_2 球體轉動慣量＝ $\frac{2}{5}M\frac{R_2^{\,5}-R_1^{\,5}}{R_2^{\,3}-R_1^{\,3}}$



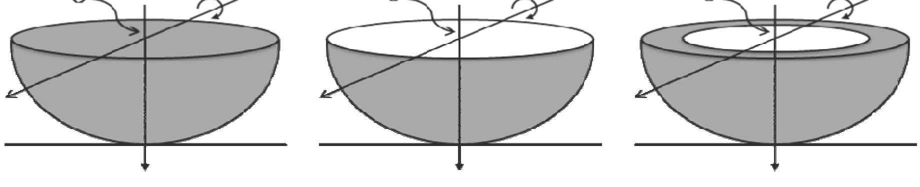
圖四、球體的轉動慣量

把球體切成一半成半球體，通過半球體上方圓面的轉動慣量減半，但由於質量也減半，所以轉動慣量公式不變，可推知薄碗、半球與厚度 $d=R_2-R_1$ 碗對通過質心之水平軸的轉動慣量，但此時轉軸為通過原球心之半球面上方轉軸，見圖五。

(a) 薄碗殼轉動慣量＝ $\frac{2}{3}MR^2$

(b) 半球體轉動慣量＝ $\frac{2}{5}MR^2$

(c) 內半徑 R_1、外半徑 R_2 球體轉動慣量＝ $\frac{2}{5}M\frac{R_2^{\,5}-R_1^{\,5}}{R_2^{\,3}-R_1^{\,3}}$



圖五、半球體的轉動慣量

二、以底部為支點的轉動慣量

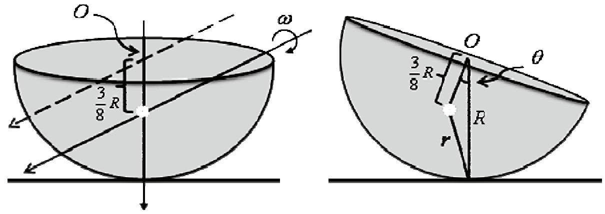
球體。碗面擺動時並非以通過原球心處爲轉軸，而以底部爲支點。先由平行軸定理 $I = I_{com} + Mr^2$（Halliday, 2005）可推算出通過質心之轉動慣量 I_{com}，見圖六(a)。

$$I = \frac{2}{5}MR^2 = I_{com} + M(\frac{3}{8}R)^2 \Rightarrow I_{com} = \frac{2}{5}MR^2 - M(\frac{3}{8}R)^2 = \frac{83}{320}MR^2$$ 再以平行軸定理求出以底爲支點轉動慣量 I_b，見圖六(b)。

$$I_b = I_{com} + Mr^2 = \frac{83}{320}MR^2 + M\left[R^2 + \left(\frac{3}{8}R\right)^2 - 2R \times \frac{3}{8}R\cos\theta\right]$$

$$= MR^2\left[\frac{83}{320} + 1 + \frac{9}{64} - \frac{3}{4}\cos\theta\right] = MR^2[\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\cos\theta]$$

(a)　　　　　　　　(b)



圖六　半球體以底部為支點的轉動慣量

同理可以求得薄碗與厚碗以底爲支點的轉動慣量 I_b

薄碗：

$$I = \frac{2}{3}MR^2 = I_{com} + M(\frac{1}{2}R)^2 \Rightarrow I_{com} = \frac{2}{3}MR^2 - M(\frac{1}{2}R)^2 = \frac{5}{12}MR^2$$

$$I_b = I_{com} + Mr^2 = \frac{5}{12}MR^2 + M\left[R^2 + \left(\frac{1}{2}R\right)^2 - 2R \times \frac{1}{2}R\cos\theta\right]$$

$$= MR^2\left[\frac{5}{12} + 1 + \frac{1}{4} - \cos\theta\right] = MR^2[\frac{5}{3} - \cos\theta]$$

厚碗：

$$I = I_{com} + Mr^2 = \frac{2}{5}M\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} = I_{com} + M(\frac{3}{8}\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3})^2$$

$$\Rightarrow I_{com} = \frac{2}{5}M\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{9}{64}M(\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3})^2$$

$$I_b = I_{com} + Mr^2 = I_{com} + M\left[R_2^2 + \left(\frac{3}{8}\times\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}\right)^2 - 2R_2\times\left(\frac{3}{8}\times\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}\right)\cos\theta\right]$$

$$= I_{com} + M\left[R_2^2 + \frac{9}{64}\left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}\right)^2 - \frac{3}{4}R_2\times\left(\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3}\right)\cos\theta\right]$$

三、假設小角度 $\theta \le 5°$，轉動慣量為定值

半球擺盪，爲非固定支點，所以轉動慣量並非定值，用數學軟體代入不同角度數值討論。

半球轉動慣量 $I_b = MR^2[\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\cos\theta]$

角度 θ	0 度	1 度	2 度	3 度	4 度	5 度	30 度	60 度	90 度
$\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\cos\theta$	0.650	0.650	0.650	0.651	0.652	0.653	0.750	1.025	1.400

薄碗轉動慣量 $I_b = MR^2[\frac{5}{3} - \cos\theta]$

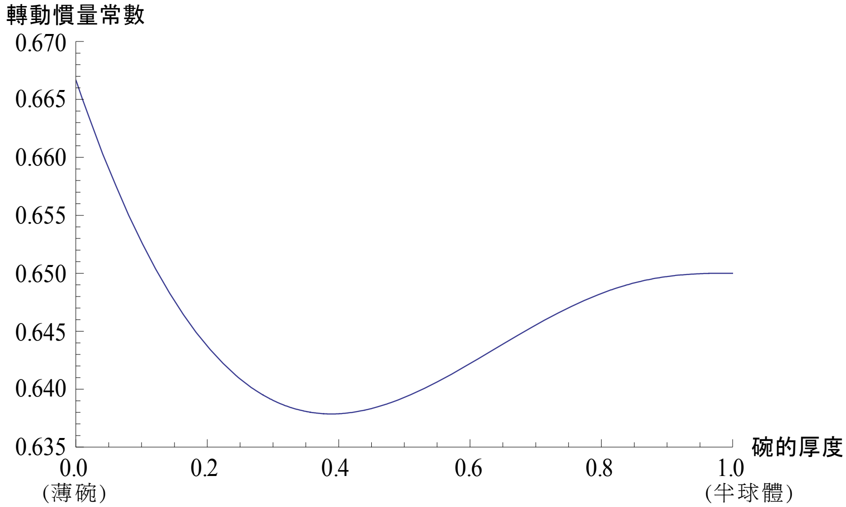
角度 θ	0 度	1 度	2 度	3 度	4 度	5 度	30 度	60 度	90 度
$\frac{5}{3} - \cos\theta$	0.667	0.667	0.667	0.668	0.669	0.670	0.801	1.167	1.667

由上兩表格可知，當角度 $\theta \le 5°$ 時，半球體轉動慣量 $I \cong \frac{13}{20}\times MR^2$，薄碗轉動慣量 $I \cong \frac{2}{3}\times MR^2$，而厚碗的轉動慣量介於此數值之間。

$$I_{com} = \frac{2}{5}M\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{9}{64}M(\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3})^2$$

$$I_b \cong \frac{2}{5}M\frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3} - \frac{9}{64}M(\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3})^2 + M(R_2 - \frac{3}{8}\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_2^3 - R_1^3})^2 = MR_2^2 \times K_2$$

利用數學軟體繪出圖七驗證上式，K_2 定義爲轉動慣量常數，發現厚碗在小角度擺盪時，轉動慣量隨碗厚度比例改變，其 K_2 值介於 0.638 至 0.667 之間。



圖七、碗的厚度與轉動慣量曲線圖

參、計算小角度擺盪週期

一、半球體的擺盪週期

由於碗面擺盪，受到重力此外力作用，相對於底部支點產生一恢復力矩，而往復運動。在小角度下，其物理狀態近似於高二上物理課本中『單擺的運動』(物理(上) 第四章)，可視爲以 $\theta = 0$ 的平衡點作簡諧運動。先由簡易的半球體擺盪週期討論，見圖八。

- 半球體重心爲 $\mathrm{G} = \frac{3}{8}R$，底部支點至重心 $\mathrm{H} \cong \mathrm{R\text{-}G} = \frac{5}{8}R$
- 半球體質量 $M = \frac{2}{3}\pi R^3 \times \rho$
- 以底爲支點的轉動慣量 $I = MR^2[\frac{7}{5} - \frac{3}{4}\cos\theta] \xrightarrow{\theta \le 5^\circ} \frac{13}{20}MR^2$

轉動力矩 $\tau = I \times \alpha \Rightarrow Mg \times \frac{5}{8}R\phi = \frac{13}{20}MR^2 \times \alpha$

由圖八$(a)(b)$可知，$x = \frac{5}{8}R\phi$、$a_x = \frac{5}{8}R\alpha$

$$\Rightarrow \mathrm{M}g \times x = \frac{13}{20}\mathrm{M}R^2 \times (\frac{8a_x}{5R}) = \frac{104}{100}\mathrm{MR} \times a_x \Rightarrow gx = \frac{104}{100}R \times a_x \Rightarrow gx = \frac{104}{100}R \times \omega^2 x$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{100g}{104R}} = \sqrt{\frac{25g}{26R}} \Rightarrow T = 2\pi \times \sqrt{\frac{26R}{25g}}$$

二、薄碗的擺盪週期

同理可求得薄碗的擺盪週期

- 薄碗重心為 $G=\dfrac{1}{2}R$，底部支點至重心 $H \cong R-G=\dfrac{1}{2}R$
- 薄碗質量 $M=\dfrac{2}{5}\pi R^3 \times \rho$
- 以底為支點的轉動慣量 $I=MR^2[\dfrac{5}{3}-\cos\theta] \xrightarrow{\theta \le 5^\circ} \dfrac{2}{3}MR^2$

轉動力矩 $\tau = I \times \alpha \Rightarrow Mg \times \dfrac{1}{2}R\phi = \dfrac{2}{3}MR^2 \times \alpha$

由圖八(c)可知，$x=\dfrac{1}{2}R\phi$、$a_x=\dfrac{1}{2}R\alpha$

$$\Rightarrow \mathrm{M}g \times x = \frac{2}{3}\mathrm{M}R^2 \times (\frac{2a_x}{R}) = \frac{4}{3}\mathrm{MR} \times a_x \Rightarrow gx = \frac{4}{3}R \times a_x \Rightarrow gx = \frac{4}{3}R \times \omega^2 x$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{4R}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{4R}{3g}} = 4\pi\sqrt{\frac{R}{3g}}$$

三、碗的擺動週期

已知半球體擺動週期為 $2\pi\sqrt{\dfrac{26R}{25g}}$，薄碗擺動週期為 $2\pi\sqrt{\dfrac{4R}{3g}}$，若為有厚度碗，其週期應該在 $2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}\times 1.0198$ 與 $2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}\times 1.1547$ 之間。

- 碗重心為 $G=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{R_2{}^4-R_1{}^4}{R_2{}^3-R_1{}^3}=\dfrac{3}{8}\times\dfrac{R_2{}^4-(R_2-d)^4}{R_2{}^3-(R_2-d)^3}$，
- 底部支點至重心 $H \cong R_2 - G = R_2 - \dfrac{3}{8}\times\dfrac{R_2{}^4-R_1{}^4}{R_2{}^3-R_1{}^3}$
- 碗質量 $M=\dfrac{2}{3}\pi(R_2{}^3-R_1{}^3)\times\rho$

● 以底為支點的轉動慣量

$$I_b \cong \frac{2}{5}M\frac{\mathrm{R_2}^5-\mathrm{R_1}^5}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3}-\frac{9}{64}M(\frac{\mathrm{R_2}^4-\mathrm{R_1}^4}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3})^2+M(\mathrm{R_2}-\frac{3}{8}\frac{\mathrm{R_2}^4-\mathrm{R_1}^4}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3})^2$$

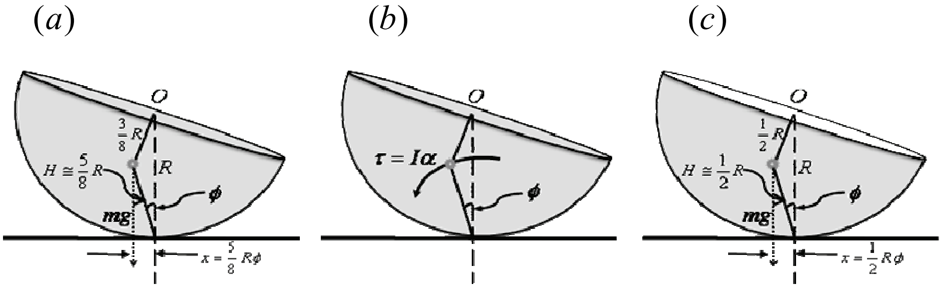
轉動力矩 $\tau = I\times\alpha \Rightarrow Mg\times H\phi = I_b\times\alpha$

已知 $x = H\phi$、$a_x = H\alpha$

$$\Rightarrow \mathrm{M}g\times x = I_b\times(\frac{a_x}{H}) \Rightarrow Mgx = \frac{I_b}{H}\times a_x \Rightarrow Mgx = \frac{I_b}{H}\times\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{MgH}{I_b}}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi\times\sqrt{\frac{I_b}{MgH}} = 2\pi\times\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\frac{\mathrm{R_2}^5-\mathrm{R_1}^5}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3}-\frac{9}{64}(\frac{\mathrm{R_2}^4-\mathrm{R_1}^4}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3})^2+(\mathrm{R_2}-\frac{3}{8}\frac{\mathrm{R_2}^4-\mathrm{R_1}^4}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3})^2}{g\times(R_2-\frac{3}{8}\times\frac{R_2^4-R_1^4}{R_2^3-R_1^3})}}$$



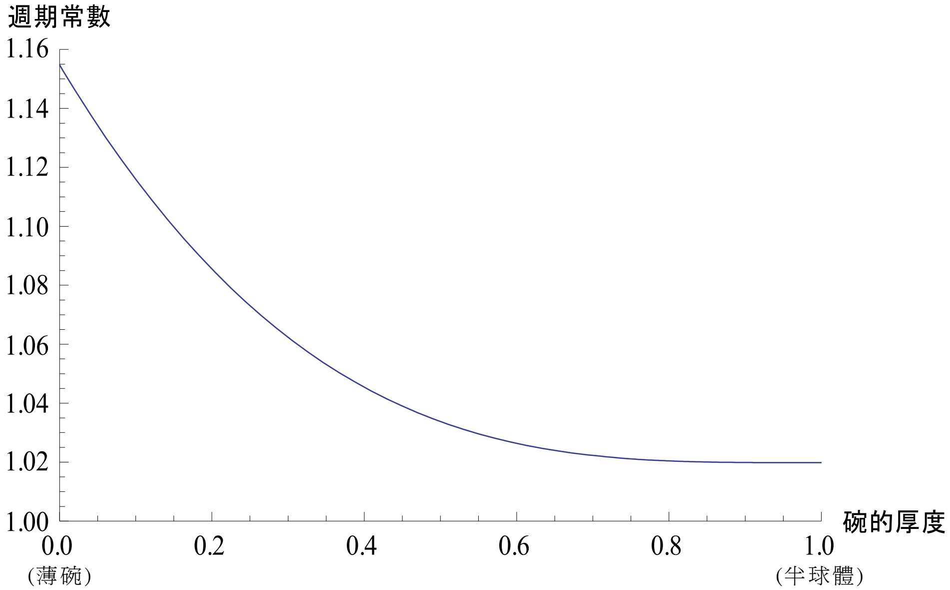
圖八、半球體因轉動力矩產生小角度擺盪

利用數學軟體繪出圖九驗證上式。

$$T = 2\pi\times\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\frac{\mathrm{R_2}^5-\mathrm{R_1}^5}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3}-\frac{9}{64}(\frac{\mathrm{R_2}^4-\mathrm{R_1}^4}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3})^2+(\mathrm{R_2}-\frac{3}{8}\frac{\mathrm{R_2}^4-\mathrm{R_1}^4}{\mathrm{R_2}^3-\mathrm{R_1}^3})^2}{g\times(R_2-\frac{3}{8}\times\frac{R_2^4-R_1^4}{R_2^3-R_1^3})}} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{R_2}}{g}}\times K_3$$

，K_3 定義為週期常數，發現厚碗在小角度擺盪時，週期常數隨碗厚度比例改變，其值介於 1.1547 至 1.0198 之間，與薄碗擺動週期為 $2\pi\sqrt{\frac{4R}{3g}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\times 1.1547$，半球體擺動

週期爲 $2\pi\sqrt{\dfrac{26R}{25g}}=2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}\times 1.0198$ 相符合，證明結束。



圖九 碗的厚度與轉動週期曲線圖

肆、結語

真實的擺，通常稱作複擺，複擺週期公式爲 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgH}}$（Halliday, 2005），文章最後也有證明求得。複雜的計算過程，結果與簡易單擺震盪週期公式 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ 相去不遠，這是物理學迷人之處。

倒反放置的半罩式安全帽隨處可見，生活中小小的例子可以激發人們的思考，以此文期望自己與所教過的學生們，都能有更寬廣的物理思維。

參考資料

褚德三主編(2008)，普通高級中學 物理(上)，龍騰文化事業。

Halliday, D., Resnick, R. & Walker, J. (2005), Fundamentals of Physics (7th Edition, Extended), New York: John Wiley & Sons, Inc.