中學生通訊解題第六十二期題目解答與評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
6201

已知 x、y 是正整數，考慮三個數 x，$\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{2}{x}+y$，設 m 爲這三個數中最小的一個數。求 m 的最大值爲何？

參考解答：

廖浩翔同學的解法

∵因 x、y 是正整數

∴ x ≥ 1，y ≥ 1 ≥ $\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{2}{x}+y$ > y ≥ 1

所以 $m=\dfrac{1}{y}$

而當 y=1 時，$\dfrac{1}{y}$的最大值爲 1。

解題評註：

(1) 本題主要是希望同學們能理解對一群數中的最小數取最大值的意義。

(2) 原本題目中的條件本應爲「x、y 是正實數」，此時 m 的最大值爲何？同學也可以再思考一下，答案爲 $\sqrt{3}$。

問題編號
6202

設 x、y、z 是整數，求方程式 $\dfrac{1}{2}(x+y)(y+z)(z+x)+(x+y+z)^3=1-xyz$ 的所有解。

參考解答：

【方法一】

原方程式可化簡成

$2(x+y+z)^3+(x+y)(y+z)(z+x)+2xyz=2$。

令 $f(x,y,z)=2(x+y+z)^3+(x+y)(y+z)(z+x)+2xyz$，

很明顯 $f(x,y,z)$是一個三次齊次對稱式，如果 $f(x,y,z)$有一次因式 $ax+by+cz$，則由輪轉對稱的性質知，$cx+ay+bz$與 $bx+cy+az$ 也是其一次因式。所以假設 $f(x,y,z)$ $=k(x+\ell y+mz)(mx+y+\ell z)(\ell x+my+z)$，此時取 $x=1,y=-1,z=0$，得 $(1-\ell)(m-1)(\ell-m)=0$，所以 $\ell=1$ 或 $m=1$或 $\ell=m$。

如果 $\ell=1$，取 $x=1,y=-1,z=-1$，得 $m=2$。比較係數後可得 $k=1$，所以 $f(x,y,z)=(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)$（若由 $m=1$或 $\ell=m$ 也可得到此因式分解）。原方程式成爲

$(2x+y+z)(x+2y+z)(x+y+2z)=2$，因

其爲對稱式，所以先假設 $x \ge y \ge z$。因爲 x、y、z 是整數，故

$$\begin{cases}2x+y+z=2\\x+2y+z=1\\x+y+2z=1\end{cases} \text{ 或 } \begin{cases}2x+y+z=2\\x+2y+z=-1\\x+y+2z=-1\end{cases} \text{ 或}$$

$$\begin{cases}2x+y+z=1\\x+2y+z=-1\\x+y+2z=-2\end{cases}$$

，第一組解爲 $(1,0,0)$，第二組解爲 $(2,-1,-1)$，第三組無整數解。因此方程式的所有解爲 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，$(2,-1,-1)$，$(-1,2,-1)$，$(-1,-1,2)$。

【方法二】

設 $x+y=u$、$y+z=v$、$z+x=w$，則方程式變成

$$4uvw+(u+v+w)^3=8-(u+v-w)(u-v+w)(-u+v+w)$$

整理得

$$u^2v+v^2w+w^2u+uv^2+vw^2+wu^2+2uvw=2$$

將左式因式分解得

$(u+v)(v+w)(w+u)=2$，所以

$(u+v,v+w,w+u)=(1,1,2)$，$(-1,-1,2)$，$(-1,1,-2)$及其排列情形

分別求解得(u, v, w) = (1,0,1)，(1, 2,1)，(1,0, 2)，進而得(x, y, z) = $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$，$(2,-1,-1)$，$(-1,2,-1)$，$(-1,-1,2)$

問題編號
6203

在連續正整數的數列中，由 1 開始依次按下面的規則染成紅色：

(1) 先將 1 染成紅色

(2) 在 1 之後染 2 個連續偶數成紅色：2, 4

(3) 在 4 之後染 3 個連續奇數成紅色：5,7,9

(4) 在 9 之後染 4 個連續偶數成紅色：10, 12, 14, 16

(5) 在 16 之後染 5 個連續奇數成紅色：17, 19, 21, 23, 25

依此規則繼續下去得到一個新的紅色數列：1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, …試問此新的紅色數列的第 2008 項的數字爲何？

參考解答：

3953

(1) 第 1 次染紅：1; 1 = 12

第 2 次染紅：在 1 之後染兩個連續偶數成紅色：2, 4 = 22

第 3 次染紅：在 22 之後染三個連續奇數成紅色：5, 7, 9 = 32

第 4 次染紅：在 32 之後染四個連續偶數成紅色：10, 12, 14, 16 = 42

推測：第 n 次染紅的最後一個數字爲 n2.

證明：

若 k 爲奇數，則第 k+1 次需染紅 k2 後的連續 k + 1 個偶數：k^2+1, k^2+3, …, $k^2+2(k+1)-1=(k+1)^2$，若 k 爲偶數，同理可證。

(2) 前 k 次共染紅 1 + 2 +3 + … + k =

$\dfrac{k(k+1)}{2}$ 個數字

$\dfrac{k(k+1)}{2} \le 2008 \Rightarrow k(k+1) \le 4016 \Rightarrow k \le 62$

由於前 62 次步驟共染紅 1953 個數字，且第 1953 個數字爲 $62^2 = 3844$

而第 2008 個數字在第 63 次染紅，且爲第 63 次步驟中的第 2008－1953 = 5 個數字，$3844+(2\times55-1)=3953$，所以此新紅色數列的第 2008 項爲 3953。

解題評註：

本題中，所有作答的同學皆能觀察出數列的規則，得出第 k 次著色的最後一個數字爲 k2 的結論。在這類題目中，找到數列規則後，除了得到最後答案之外，先利用數學規納法來證明觀察出的結論是必要的步驟。

問題編號 6204

已知 $n!=1\times2\times\cdots\times(n-1)\times n$；若 $\dfrac{2}{3!}+\dfrac{3}{4!}+\dfrac{4}{5!}+\cdots+\dfrac{11}{12!}=\dfrac{A}{12!}$，試求 A 除以 10 的餘數爲何?

參考解答：

$$\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\frac{4}{5!}+\cdots+\frac{11}{12!}=\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11!}-\frac{1}{12!}\right)=\frac{3\times4\times\cdots\times12-1}{12!}$$

故 A=239500799　即 A÷10 的餘數等於 9。

因爲 $3\times4\times5\times6\times\cdots\times11\times12$ 中含有 10，所以乘積的個位數必爲 0

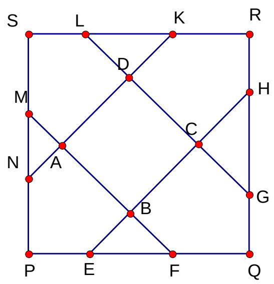
因此乘積在減去 1 後得到個位數爲 9，即 A÷10 的餘數等於 9。

解題評註：

本題屬於初等數論的計算問題，並且需要運用階層的計算技巧以簡化計算過程並且避免其中大量計算。

問題編號 6205

如右圖，小正方形 ABCD 各邊所在的直線與大正方形 PQRS 的各邊分別交於 E,F,G,H,K, L,M,N



試證：$\overline{EF}+\overline{KL}=\overline{GH}+\overline{MN}$

參考解答：

提供證明方法如下：

1. 延長 BD,AC 分別與大正方形 PQRS 的各邊交於 U,V,X,Y
2. ∵ABCD 爲正方形，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$

   $\therefore \overline{UX}\perp\overline{YV}, \overline{UX}=\overline{YV}$

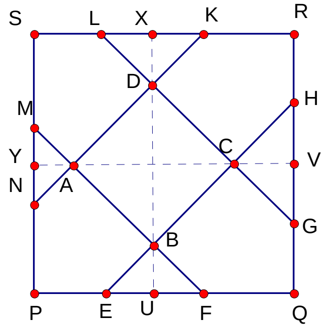
   $\therefore \overline{BU}+\overline{DX}=\overline{CV}+\overline{AY}$ ----------(1)

   ∵∠EPM+∠EBM=180°，E,B,M,P 四點共圓

   ∠BEF=∠AMN　同理∠BFE=∠ANM

$\therefore \Delta BEF \sim \Delta AMN$

同理 $\Delta BEF \cong \Delta AMN \cong \Delta CGH \cong \Delta DPQ$



而 $\overline{BU},\overline{CV},\overline{DX},\overline{AY}$ 分別是 4 個相似三角形的對應角平分線

所以 $\dfrac{\overline{BU}}{\overline{CV}}=\dfrac{\overline{EF}}{\overline{GH}},\dfrac{\overline{CV}}{\overline{DX}}=\dfrac{\overline{GH}}{\overline{LK}},\dfrac{\overline{DX}}{\overline{AY}}=\dfrac{\overline{LK}}{\overline{MN}},\dfrac{\overline{AY}}{\overline{BU}}=\dfrac{\overline{MN}}{\overline{EF}}$

設 $\dfrac{\overline{BU}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{CV}}{\overline{GH}}=\dfrac{\overline{DX}}{\overline{LK}}=\dfrac{\overline{AY}}{\overline{MN}}=\alpha$，

所以 $\overline{BU}=\alpha\overline{EF},\overline{CV}=\alpha\overline{GH},\overline{DX}=\alpha\overline{LK},\overline{AY}=\alpha\overline{MN}$

代入(1)

可得 $\overline{EF}+\overline{KL}=\overline{GH}+\overline{MN}$

解題評註：

對於稍微繁雜的證明過程或需要藉由作補助線完成證明的題目，一般學生都不願意去碰去思考，本題難度較高，參與徵題的學生人數較少，但卻發現國中學生奇妙的想像力，與跳脫原來綜合幾何全等與相似的作法。

有一位同學看到是正方形就設立直角座標，用斜率、直線方程式、求交點等解析的方法來證明，這是要有很大的毅力與恆心方可完成的，不過若是每個幾何證明題目皆如此處理，可能會累死了。

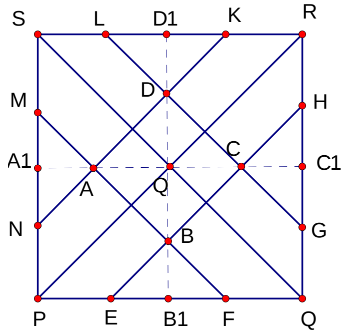
也有同學用三角函數的方法來證明，雖然創意十足，但不太鼓勵，還是建議用國中純幾何的方法比較好，比較自然。提供不同證明的方法與大家分享

【解法二】

(1) 當兩正方形對角線的焦點重合時

$\Delta SOD_1 \cong \Delta POA_1 \cong \Delta QOB_1 \cong \Delta ROC_1$

$$\left(\begin{array}{c}\angle SOD_1=\angle POA_1=\angle QOB_1=\angle ROC_1\\ \overline{SO}=\overline{PO}=\overline{QO}=\overline{RO}\\ \angle SD_1O=\angle PA_1O=\angle QB_1O=\angle RC_1O\end{array}\right)$$



$\because \overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}$

$\therefore \overline{AA_1}=\overline{BB_1}=\overline{CC_1}=\overline{DD_1}$

$\angle LD_1D=\angle NA_1A=\angle FB_1B=\angle HC_1C$

$\angle LD_1D=\angle NA_1A=\angle FB_1B=\angle HC_1C$

$\angle D_1DL=\angle A_1AN=\angle B_1BF=\angle C_1CH$

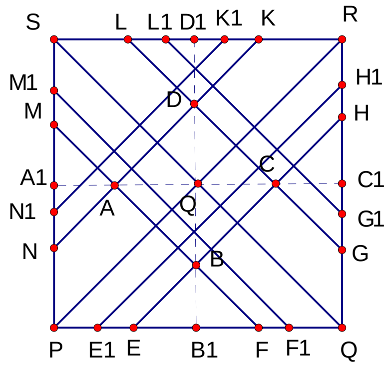
$\therefore \Delta LD_1D \cong \Delta NA_1A \cong \Delta FB_1B \cong \Delta HC_1C$

同理

$\Delta KD_1D \cong \Delta MA_1A \cong \Delta EB_1B \cong \Delta HC_1C$

$\therefore \overline{KL}=\overline{MN}=\overline{EF}=\overline{GH}$

$\Rightarrow \overline{KL}+\overline{EF}=\overline{MN}+\overline{GH}$



(2) 當 ABCD 沿 AC 或 BD 上下或左右移動時

$\overline{M_1N_1}+\overline{H_1G_1}=\overline{L_1K_1}+\overline{E_1F_1}$

(3) 因此 ABCD 任意上下或左右移動時均成立

$\therefore \overline{KL}+\overline{EF}=\overline{MN}+\overline{GH}$

【解法三】

設

P(0,0).,E(a,0),F(b,0),Q(k,0),R(k,k),S(0,k)

設 $\overleftrightarrow{EH}$ ：y=m(x-a)，∴H(k,mk-ma)

$\because \overleftrightarrow{EH} // \overleftrightarrow{NK}$，設 $\overleftrightarrow{NK}$ ：y=mx-A

設 $\overline{AB}$ =d，

$$\frac{|A-ma|}{\sqrt{1+m^2}}=d \Rightarrow A=ma\pm d\sqrt{1+m^2}$$

$\overleftrightarrow{NK}$ ： $y=mx-ma\pm d\sqrt{1+m^2}$ ，

$\therefore N(0,-ma\pm d\sqrt{1+m^2})$，$K(a+\dfrac{k-\sqrt{1+m^2}}{m},k)$

同理 $G(k,\dfrac{b-k+\sqrt{1+m^2}}{m})$，$l(b-mk+d\sqrt{1+m^2},k)$

$\overline{MN}+\overline{HG}=$

$(\dfrac{b}{m}+ma-d\sqrt{1+m^2})+(mk-ma-\dfrac{b-k+d\sqrt{1+m^2}}{m})=$

$mk+\dfrac{k}{m}-d\sqrt{1+m^2}-\dfrac{d\sqrt{1+m^2}}{m}$

$\overline{EF}+\overline{KL}=$

$(b-a)+(a+\dfrac{k-d-d\sqrt{1+m^2}}{m}-b+mk+d\sqrt{1+m^2})=$

$mk+\dfrac{k}{m}-d\sqrt{1+m^2}-\dfrac{d\sqrt{1+m^2}}{m}$

$\therefore \overline{EF}+\overline{KL}=\overline{GH}+\overline{MN}$