
從鄔瑞香老師的數學教學前瞻開放式教學 在本土實踐的可能性

劉祥通^{1*} 周立勳² 黃國勳³

¹國立嘉義大學 數學教育所

²國立嘉義大學 教育學系

³國立高雄師範大學 教育研究所

鄔瑞香老師畢業於台北市女師，任教於台北市東園國小，一生奉獻於小學教育，對於數學教學更是不遺餘力，可惜她五十出頭即積勞成疾，2000年6月揮別同道與學生。爲了追憶她的教學風采與熱忱奉獻，作者特地撰文描述她的教學轉折與特色，當憶起她的教學風格時，也讓作者聯想到在日本與美國發展與實踐的開放式教學，因而藉此介紹開放式教學，並前瞻開放式教學在本土實踐的可能性。

壹、鄔老師的教學轉折

一、研究背景

鄔老師自師範學校畢業起，即對國小數學教學有很高的興趣。她用心的規劃每一堂數學課，廣泛的爲學生蒐集許多的題目並加以分類，作爲學生精熟練習的教材。不出幾年，她果然成爲國小數學名師。她所教過的學生，在升初中的數學測驗上皆展現傲人的成績。她認爲教好數學的訣竅其實很簡單，那就是仔細而有系統的講解以及讓學生反覆的練習直到精熟。

有一天，鄔老師遇到在中學教英文的過去學生。寒暄中，這位學生對她說：「感謝老師從前用心的教導我們數學，雖然從前的數學課我都聽不懂，但只要將老師讓我們做過的題目背起來，就能使我在升學考試的競爭中無往不利。不過後來上高中，我發現數學實在很難背，只好放棄數學而選擇讀文組。」我的天啊！這個當年每次考試都100分的小孩，學習數學的過程竟是如此的艱辛。學生的這番話，對以數學名師自豪的鄔老師而言，無異是一記當頭棒喝。

的確，以往的數學教育其實就是講解式的教學，過量的作業與反覆式的練習。只要求時效性及演算的正確性，不講究思考及反省解題的過程。僅看表面的考試成績，不注重學生是否真正的瞭解，因此學生逐漸失去學習數學的興趣。隨著年段的提高，不喜歡數學的比率也隨之增加。再者，大多數人都利用背公式、背定理的方式來應付數學，造成學生對於數學的信念是：「除了應付考試之外，數學一點用處都沒有。」這種現象，著實令鄔老師爲當時的數學教育品質而擔憂。她決心要重新

* 爲本文通訊作者

來過，讓學生真正「學好」數學 1。

因此，鄔老師開始嘗試改變教學方式時，剛好台大數學系朱建正教授建議她給學生寫數學日誌。她開始要求學生在每個單元後寫下心得與反思，期望學生藉由寫作將學習後心得組織化與精緻化。她在 1992 年至 1994 年間實施數學日誌，藉由學生的數學日誌，反思其教學成效，也給予學生註解、再次佈題或正面的回饋。如此的教學模式，不僅打破傳統「填鴨式」的教學，更重要的是讓整個教學過程，達到以學生為中心的理想教學(註 1)

貳、鄔老師數學教學的特色

鄔瑞香老師數學教學法的演變，是從傳統講述、注重演算和解題精熟的教學取向，轉向注重學生理解概念與自我建構的教學取向，其轉變後之教學特色如下(改寫自，劉祥通、鄔瑞香與黃瓊儀，2000)。

一、重視反思而發現的過程

在傳統講述教學的數學課室中，大部分的老師都是「一邊上課，一邊講解」或「問問題－學生簡答」，向學生提問的類型，似乎只是一種「裝飾性的問題 (rhetorical question)」(Brissenden, 1988, p.18)，例如問學生「一公尺等於100公分，對不對？」，這樣封閉性的問題，學生別無選擇，當然只能依照教師所問的問題，去回答老師所要的標準答案。

在鄔瑞香老師數學教學歷程中，她善

於利用佈題情境與數學寫作來提供學生反思的機會，藉以促進學生的數學思考，進而自我發現數學知識，建立數學概念。例如：鄔瑞香老師佈題：「給一條20公分的繩子，畫出五種不同的長方形，計算面積之後，發現了什麼？」在佈題之後，請學生實際操作演算，然後將自己的想法寫出來，目的是讓學生透過實作，以及數學寫作反思的過程，能夠自我發現「長與寬差距越小的長方形，面積就越大。」此外，她也善於透過演算法的佈題，來引導學生從不同的路徑中體認演算法則的意義，例如：已知 $9 \times 12 = 108$ ， $90 \times 12 = 1080$ ， $900 \times 12 = 10800$ ，請問如何從以上三個已知的式子計算 $999 \times 12 = ?$ 鄔老師這樣的佈題考驗學生是否會利用分配律以合併上述三式。這一個佈題的目的即是希望學生能夠深刻地認識演算法的深層意義，再藉由寫作轉化表徵出來。

Schoenfeld (1992) 強調數學教學應以兒童的直觀經驗為素材，希望透過逐步數學化的過程來促進兒童重新發現 (reinvent) 數學知識，促進學生學得數學化的思考 (learning to think mathematically)。鄔瑞香老師利用佈題與寫作來促使學生反思，甚而發現數學知識，這樣的教學歷程正符合了 Schoenfeld 所期望的數學教育的目的。

二、重視自然解法與討論

鄔瑞香老師的教學通常是先佈題，然後請學生解題，同時請學生將解題的想法

寫出來或說出來。例如鄔瑞香的一個教學案例（1994.5.24）

有一個蛋糕它有多大？怎樣描述才合理？（引自劉祥通和黃國勳，2003）。

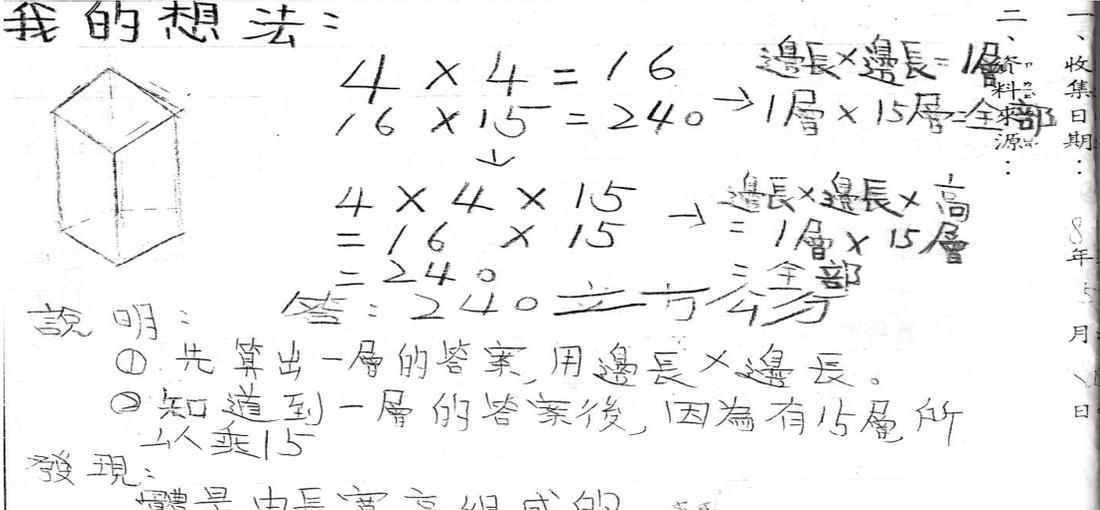
汪生的作法是：先量一量基本資料長、寬、高的長度，例如長（4公分）寬（4公分）高（15公分）。 $4 \times 4 = 16$ ； $16 \times 15 = 240$ （立方公分）。說明：先算出一層的答案，用邊長 \times 邊長；知道一層的答案後，因為有15層，所以乘以15。最後發現：體積是由長、寬與高組成的。請見圖一。

基本上，體積不應只是長 \times 寬 \times 高的刻板印象，體積是物體佔有空間的量，體積的測量是堆疊活動數值化的結果。體積概念的啟蒙可用多種表徵方式加以描述，以獲得物體佔有空間大小的經驗，最後，才

是用數值化的方式表示。鄔老師佈這一個题目的用意是：「探討學生對一個物體大小的初始想法？也想看看有多少學童會利用課堂已學過的體積來描述。」由這位學生的寫作內容來看，確實可以幫助老師了解學生如何描述一個物體的大小，以及是否會利用已學過的數值化的「體積」來描述。

從學生的表徵中會呈現出許多的自然解法，鄔瑞香老師再根據他們的自然解法去追問學生，請學生解釋理由。學生為了詮釋她們的自然解法，便要設法整理自己的思緒，然後將思考表徵出來，於是教室裡的對話、討論、爭辯與質疑就自然而然發生了，也因而激發兒童不斷省思、論證，最後使得學童的迷思概念獲得澄清，修正原始的想法，正確或格式化的數學知識能夠藉此傳播出去。

我的想法：



$4 \times 4 = 16$ 邊長 \times 邊長=1層
 $16 \times 15 = 240 \rightarrow$ 1層 \times 15層=全部
 $4 \times 4 \times 15 = 16 \times 15 = 240$ 邊長 \times 邊長 \times 高=1層 \times 15層
 答：240 立方公分

說明：

- 先算出一層的答案，用邊長 \times 邊長。
- 知道到一層的答案後，因為有15層所以乘15

發現：體是由長寬高組成的。

二、資料來源：8年5月1日

圖一

這樣的活動不同於紙筆評量活動，具有開放式評量的特質，它是沒有標準答案的，不同程度的學生會有不同層次的回答，教師可以根據學生的自然解法了解學童的認知層次，也可以判斷學生對課堂的了解與應用能力。另一方面，藉由數學寫作單的習作，學生也可以將心中解題的想法和作法，透過文字和圖形描述出來，如此不僅讓老師瞭解學生的算式過程，也能更進一步掌握學生解題的邏輯和所應用的數學知識是否正確。

總之，在這樣佈題、解題、表徵與討論的歷程中，藉由互相討論各自的自然解法，學生有機會透過省思自己的經驗來產生學習，不斷將自然解法發展成格式化的數學，重組自己的數學知識體系，建構自己的數學概念。

三、重視數學連結與生活應用

從學生的數學寫作可以發現，鄔瑞香老師特別重視數學的連結與生活的應用。例如，她佈了一個相當生活化與實用性的題目：「當你沒有尺的時候如何度量東西的長度？」學生在鄔老師的教導下，也能以實際生活的例子來解題：「當沒有量尺時，我就拿長大約3公分的迴紋針或大約7公分長的牙籤來測量小物品。那大一點的東西要測量時就用我的鞋子（大約25公分）來量了。我的床原來有8隻鞋子那麼長，25公分乘以8等於200公分。」由這個佈題與解題的結果，說明了鄔瑞香老師的數學取材是與日常生活相關聯的，同時藉著生活的

應用以檢驗學生的學習成果。

數學的連結是希望幫助學童搭起具體物與抽象概念之間的關連，以及做為各種不同表徵方法之間的橋樑。而提供機會使生活經驗與正式的數學作連結，也可以幫助學童不會將數學看成只是一些概念的組合而已（NCTM, 1989, p. 33）。另外，學習數學與使用數學（using mathematics）也是學校數學課程很重要的兩個面向（NCTM, 1989, p. 32）。鄔瑞香老師的數學教學強調數學的連結與生活的應用，即符合NCTM所強調數學教學的精神。

四、鼓勵學生與豎立標竿

很少有學生天生下來就善於進行數學表徵（包括口語表達與數學寫作）。那麼，為何鄔瑞香老師的學生那麼「願意寫」與「樂意寫」呢？其中秘訣在於鄔瑞香老師為了鼓勵學生繼續探討，經常有「再次佈題」出現，例如：課堂中提出：「還有沒有別的瓶子或罐子是一公合或一公升的嗎？」或「做好以後有沒有驗證看看可行不可行？」等問題。除此之外，鄔瑞香老師也不吝於給學生鼓勵，她在每篇數學日記後面都給學生相當大的「鼓舞與勉勵」！例如：「這篇日記，對於同學的作品都有恰當的批評，可見妳更高明」，「○○妳會找問題來證明對或錯可見妳又更進步了」，與「說得頭頭是道，越來越像小數學家了」。如此持續不斷的激勵，正是學生們樂於寫作的動力來源。

再者，鄔瑞香老師也給予學生具體明

確的「學習標竿」，來做為努力的目標與準則。有三位學生在記錄簿上這樣寫著：鄔老師最欣賞的學生是「1.會檢驗答案，2.錯了再重新算算看，3.努力不懈不怕失敗、接受挑戰不怕失敗，請問你做到了嗎？」，學生能夠明瞭鄔老師對他們的期許，學生也無形中依循她所「設計的數學」學習，這一點也是學生在課室裡能「解數學」與「談數學」，在課後能「寫數學」的重要原因。

Becker與Shimada（1997）曾提出開放式教學（open ended approach）的步驟，作者認為此教學方式，簡而言之即是教學者「設計數學」、給學習者「解數學」、「談數學」與「寫數學」的歷程。而期望學生的數學概念或能力在前述的過程中發展，這樣的教學理念曾在日本與美國發展與實踐，顯然，鄔老師數學教學的特色正與開放式教學的理念符合。

以下分別介紹開放式教學的背景與類型，設計原則與實施步驟，以及評量方式，並且前瞻開放教學在本土實踐的可能性。

參、開放式教學的背景與類型

Schoenfeld（1988）認為，傳統教育過分強調算則及程序性知識等封閉性的問題，使得學生的思考失去彈性，無法有效的將學生的所學應用在非學校的情境，因此促使了Open approach的產生（Boaler, 1998）。研究者也認為開放式教學法的確可以給學生更多獨立思考的機會，而鼓勵多元的方式及途徑來完成老師所給予的任

務，使學生更懂的運用所學，思考也靈活許多。因此，研究者十分同意應該在學校的教學中加入開放式教學法，即便在課程進度壓力很大情況下，老師也可以嘗試在每學期中抽出一些時間進行開放式教學，使學生更能靈活地思考，使腦筋不致僵化。

「老師教什麼？以及學生如何體驗？是塑造學生理解數學到底是什麼的主要因素」（NCTM,1989）。Schoenfeld（1991;1992）也強調：學生從他們的課室活動與學習經驗中吸取了對數學的意義；如果老師把數學科分解成片段的知識然後給學生一點一滴地且逐步的精熟，那麼我們就可以預期這種教學法的學習結果。因此Schoenfeld又重申：創造一個做數學（doing mathematics）的教學環境以適合學生的學習的重要；也因此引發了選擇在課室裡選擇「數學文化」的方向。又，開放式教學將學生放在解題過程的中心，此教學法讓學生做數學（doing mathematics）與強調數學化思考（mathematically thinking）。

開放式教學大抵分成三種類型（Becker and Shimada,1997），簡略的介紹如下：

一、過程的開放（The process is open）

為了創造學習興趣與增進創造性的數學活動，在答案是唯一的問題情境，發展一種不同方式解題的問題，這種問題稱之為過程開放。唯一答案的傳統問題，解題過程也是多元的，只是過去的教學注重答案的正確與否，忽視過程是否多元，也很

少強調不同解題途徑的分享。限於篇幅，在此不另舉例。

二、結果的開放 (The end is open)

問題設計成有許多正確答案稱之為結果的開放 (Shimada,1977;Becker & Shimada,1997)。例如題目：尋找數的規律，生活中有許多按照順序排列的數字，都可以找出它的規律性。例如：我們可以在月曆上任意框出含有九個數的矩形(如表一)，我們可以找出哪些規則？上述問題可衍生出許多不同的答案，例如矩形內數字和必為九之倍數、矩形內數字和與左上角之數間的關係或以代數方式表徵九個數間的關係，或者矩形對角線的兩組數(2,18)與(4,16)之和相等，但是相乘相差28，其他變換矩形的位置，也會有相同的差，...

三、形成議題的開放 (The problem formulating is open)。

牙籤被放置成下圖中的正方形，如果

有五個正方形，需要用多少牙籤？



就以上的問題，你認為還可以如何出題呢？

預測學生可能的答案：

1. 學生可能的解答為改變正方形的數量。
2. 改變正方形的列數，如變成兩列、三列等等。
3. 改變圖形，如可將正方形改為三角形、五邊形等等。
4. 將二維空間改成三維空間。
5. 寫反面的問題，例如10根牙籤可拼成幾個正方形。

由學生對於命題的修改，從改變「正方形的數目」，「正方形的列數」「三角形或五邊形」的答案，可以發現學生思考的多元，甚至從學生改變為「三維空間」的答案，更可以發現學生的創意。再者，若有學生以反面問題，「請問10根牙籤可拼成幾個正方形？」，更可以發現學生擁有可貴的「逆向思考」能力。

表一(引自洪有情，2008)

2007 年12月						
星期日	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					

肆、開放式教學的設計原則與實施步驟

Kabiri和Smith (2003)強調實施開放式教學最重要的是要思考以下問題:

1. 是否有引發學生更高層次的概念。
2. 是否能鼓勵學生有更多批判性的思考。
3. 可否讓更多的學生引發更多的解題途徑及更多的解釋。

作者認為給學生獲得高層次的數學概念、培養批判性思考的能力，以及引發與觀摩更多元的解題途徑等作為，是數學教育的最高目標，開放式問題因以此原則設計。

接著，Becker和Shimada (1997)提出實施開放式教學時課堂準備應注意的事項：

1. 選擇一個問題情境。
2. 發展一個詳細教學計劃。
3. 寫下所有學生對此問題情境的預期反應，當做課程計畫的一部份。
4. 提供學生能以其最自然的數學方式來思考這問題情境。

作者認為所謂的選擇適當的問題情境，就是給學生設計有情境的應用問題，以給學生學習解決問題的機會，再者，老師也要預估學生可能的解題表現，以思考問題的合理性與難易程度，最後，要評估學生的先備經驗是否足夠，是否能用自發性的方法來解？

最後，Becker和Shimada也提出了開放式教學具體的實施步驟 (Becker & Shimada, 1997)：

1. 老師設計與介紹題目

2. 學生了解問題及發問
3. 學生解題 (個別作答或小組合作)
4. 討論與分享
5. 老師作總結
6. 學生寫出課後心得
7. 發課後學習單 (延伸問題)

上述的第1步驟是先將傳統的問題改設計成開放式問題，之後在課堂介紹給學生，第4步驟加入討論與分享，第6步驟寫出課後心得，以數學日誌促進反思，最後，第7步驟延伸課堂問題之課後學習，使學生能舉一反三的類化思考。開放式教學實施過程雖有明確的步驟，但也可以根據學生的需求與時間的多寡，選擇性的實施。

從以上的教學步驟，研究者不禁憶起上數學科教材教法時，一起與師資生觀摩鄔老師的教學影帶，她的數學教學，從設計與安排解題情境著手，引導學生發問，給學生小組討論與發表解題想法，鄔老師再做課堂的總結。課堂結束後，學生針對每一個單元寫數學日誌，甚至有很多學生又延伸問題在日誌本上發表高論。因此，我們可以說鄔老師的數學教學與開放式教學步驟是一致的。

伍、開放式教學的評量

問題變成開放後，答案並不唯一，答案也不可預期，如何評分呢？Conway (1999)發展出三個面向的評分方式，茲說明如下：

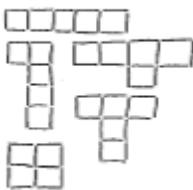
1. 流暢性 (Fluency)：其中流暢性是指總共能寫出的答案個數；
2. 靈活性 (Flexibility)：能寫出的種類

個數；

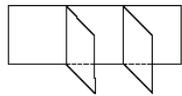
3. 創造性 (Originality) :具原創性的答案個數。

爲了舉例說明開放性問題評分的三個面向，下列以「畫出五個正方形」的例題來做說明 (Conway, 1999; 高碧卿, 2008)。

下圖 (a) 是學生阿肯的學習單，因爲他畫出5個排列方法，所以在流暢性的得分是5；而他排出的圖形中，分成橫式排列、直式橫式混合排列及正方形中有正方形三種種類，所以在靈活性的得分是3；另外因正方形中有正方形是屬於較有創意的種類，所以在創造性的得分是1。若是阿肯的學習單又再加入圖 (b)，那畫出圖形的總數是6，所以在流暢性的得分是6；再來他排出的圖形中，又多了立體圖形一種，因畫出的種類有四種，所以在靈活性的得分是4；而在創造性的評分中，因爲立體圖形也屬於頗具創意的圖形，因此創造性的項目得分爲2。



(a)



(b)

研究者也十分認同分此三面向來個別評分：流暢性的評分是爲了鼓勵同學能儘量作答，而靈活性則是希望學生除了儘量作答之外，能有更多變化，不侷限於相似的答案，當然若是作出的答案能具有創意，這也是我們最期待的。有了這三面向

的評分，就更容易促進學生活化思考、發揮想像力及激發創造力。最後，要提醒讀者的是此項評分並非適用於每一個題目，如應用問題的解題，其可能的解答方式若不多，用此三評分面向就不恰當了。

陸、國內數學教學創新與實踐(代結論)

前述提到了鄔老師數學教學的特色：重視反思而發現的過程、重視自然解法與討論、重視數學連結與生活應用，以及鼓勵學生與豎立標竿。教學的步驟則以佈題的方式作爲開始，進而激發學生高層次的思考。綜合來說，鄔老師的教學顯然與開放式教學精神一致，二者的目標都在引發學生的數學思考上，在實施步驟上也大多雷同。此外，開放式教學從課程設計、教學實施到評量，提供了一個具體明確的程序與策略。鄔老師的教學實踐智慧一從生活中尋找佈題的素材、積極鼓勵學生、爲學生豎立標竿、引導課堂的討論與發表，以及數學日誌的寫作等，則提供了實施開放式教學參考的楷模。

台大數學系的退休教授朱建正先生曾引述美國數學教師協會 (NCTM) 的一段話，優秀的數學教師就像熊貓、白鯨等瀕臨絕種的動物一樣少，像鄔老師這樣專業與投入的老師真的是很少。鄔老師教學典範的確不容易做到。到底哪一種教學可以較容易推廣與實踐呢？

幾年前，建構式數學教學遭到質疑與誤解，建構式教學不好嗎？實際上，建構

式教學的精神是不易掌握的，教學者要擁有數學的內容結構知識才能掌握教學活動的目標，也要有兒童的數學知識才能了解學習者的想法，且要有數學教學知識才能做出適當的教學安排，也就是所謂的佈題。此外，有人說建構式教學只是一種精神，並沒有一套固定的教學程序，因此，如何實踐建構式數學對於基層老師而言缺乏有效的參照基準。總之，不是建構式教學好不好的問題，而是能否做到建構式教學的問題（劉祥通，2003）。鄔瑞香老師以執著的精神，全力投入數學教學的研究、學習與教學，如果說鄔老師像是做到了建構式教學的精神，但是，我們不禁要問，又有多少老師像鄔老師？這也許是國內建構式數學教學無法成功普遍實施的原因吧！

反觀，實踐開放式教學，有具體的步驟與策略，第一線的老師可以依照步驟揣摩與實踐，也可以根據時間的多寡，重點式的選擇所要強調的重點，可以強調分享、辨正、論證、反思或一般化等數學化的過程。過去多位數學教育學者勇敢地提倡建構式數學教學並改編教科書，但是也許是師資培育未就緒，也許是配套措施不夠，也許是建構式教學太抽象，沒有具體的步驟與方法可以依循，總之遭受很多批評與誤解，至今依然存在也未見改善。開放式教學已有了設計原則、課堂計畫的要領、評分的準則、以及實施的步驟。關心數學教育的同道可以嘗試「設計數學」，期待「解數學」、「談數學」與「寫數學」的

氣氛在數學課室裡瀰漫。

註解：

註 1：2000 年本文第二作者帶數理教育系學生環島教育參觀，行程安排拜訪在屏東檳榔園中老家養病的鄔老師。在會客大廳中鄔老師頭包絲巾神采奕奕的向圍坐身旁的學生及筆者暢談其數學教學的心路歷程。此段為作者藉由回憶摘述談話部分內容。

參考文獻

- 洪有情 (2008)。 **國中數學(一上)**。台北：康軒文教事業。
- 高碧卿 (2008)。 **開放式教學活動在國中數學課室實踐之研究**。國立嘉義大學數學教育所未發表之碩士論文計畫書。
- 劉祥通(2003)。 **建構式數學由簡變繁嗎？教師之友**，44(1)，43-48。
- 劉祥通、鄔瑞香、黃瓊儀 (2000)。從學生數與量部分的數學寫作分析一位老師的數學教學。 **教育研究資訊雙月刊**，8(4)，141-166。
- 劉祥通和黃國勳 (2003)。數學活動的類型與實例。 **臺灣數學教師**，1(1)，1-6。
- Becker, J. P. & Shimada, C. (Eds.) (1997). *The open - ended Approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: Student experiences and understandings. *Journal for Research in Mathematics Education*. 29(1), 41-62.
- Brissenden, T. (1988). *Talking about mathematics*. England: Basil Blackwell.
- Conway, K. D. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 4 (8), 510-514.

- Kabiri, M. S. & Smith, N. S. (2003). Turning traditional textbook problems into open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*. 9(3), 186-192.
- National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Schoenfeld, A. (1991). On mathematics as sense-making. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds), *Informal reasoning and education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates.
- Schoenfeld, A. N. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-371). New York : Macmillan
- Shimada, S.(1997). The significance of an open-ended approach. In J. P. Becker, & S. Shimada (Eds.), *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics* (pp.1-11). Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.