

美麗的交會——一段解題的師生對話

曾富美

苗栗縣私立建台高級中學

鎮中目前就讀高一，他經常與我討論數學，數月前他的高中數學老師出了一個問題給他：請從 1,2,3,……,30 取出三個數，使其兩兩不相鄰(即不連續)。

他還沒正式學過排列組合，但他知道使用樹狀圖來了解簡單的排列。於是他問我：「這要從哪裡想？」

我雖熟悉國中課程，但並不熟悉高中的排列組合，一時間也不知道有什麼好方法。於是我們兩個程度差不多，但視野不同的人開始腦力激盪。我們就在放學時邊走邊談。

我說：「不相鄰不好找，沒什麼規律。」

他說：「那可不可以用扣除的？」

我問：「什麼意思？」

他說：「就是扣掉三個連續的、兩個連續的。」

我說：「好像可以，列列看。1、2、3、2、3、4、3、4、5、……，28、29、30，如此三個連續的有 28 個。那兩個連續的呢？」

例如 3、4 可配 1、6、7、8、……、30，左右各扣 1 個不能配，可配 $30-4=26$ 個。

於是兩兩連續的有 1、2；2、3；……；29、30 共 29 種，配上不連續的數則共有 29×26 種。

這時候，他提醒我：「1、2 與 29、30 不能配的數各只有一個。可配的應該有 27 個。」

於是我們數出總數 $4060 - 28 - 27 \times 26 - 2 \times 27 = 3276$

事隔月餘。

今日，放學一起走的時候，他又提起這個問題。他說：「老師問我這題是怎麼做？我說用扣的。老師說有更快的方法。」但是老師沒有詳述，他只記得老師提到數字之間的空隔，以及 28！

分道揚鑣之後，我騎著單車沿著外環道悠閒地晃著，腦海裡想著「空格」。繞完一圈我想到利用「空格」的方法。回到家，我打電話給他，我解說：

畫出 1、□、2、□、3、……、30□□
共有 31 個空格

他問：「為什麼 30 後面接兩個空格。」

我說：「等一下你就知道。」

製作三張卡，每一張有三格，最左取數，右兩格為空格，如此剩餘 25 個□

數

--	--	--

 數

--	--	--

 數

--	--	--

 利用這三張卡與 25 個□排列。

例如 數

--	--	--

 數

--	--	--

 數

--	--	--

□□□…□ 就是取 1、3、5。

他在電話那頭似懂非懂，問：「為什麼卡片要用兩個空格？」

我補充說：「不連續的兩數必須至少隔兩個空格，只隔一個會連續。」

他的聲音有點疲累，我也就不再囉唆，叮嚀他再想一想。

他說：「我畫畫看。」於是我們就收線了。

一個鐘頭後，他打電話來：「你剛才講的，我還是不懂。但是我在洗澡時，想到用兩格的卡片來排。」

他說：「兩格，左邊是數字，右邊是空格。然後用三張卡片跟 25 個空格來排。」

我問：「只隔一個空格會連續啊！」

他說：「不是啦！那個不是數字之間的空格。」

他解釋如果兩張卡並列就是取一個，不取一個，再取一個，不取一個。

我畫下他所講的

取	不
---	---

取	不
---	---

取	不
---	---

 □□□□……□

我說：「你的卡片排列是對應到數字 1,2,3,……..30，對到『取』則取用，『不』或空格皆不取。我了解了。你的方法比我的好。」

他說：「也不是這樣啦！我只是聽不懂你的。洗澡的時候想一想……。」「明天你再把你的圖畫給我看。」

我說：「你的是對應數字，我的是對應數字間的空格。你再想想，把數字間的空格畫出來你就懂了。不過還是你的比較容易懂。」聽的出來他在電話那頭很害羞接受我的讚美。

費曼曾引用歷史學家吉本的話：「老師教導的功夫，除了在教與學雙方兩相歡愉的情況下，成效極少顯現出來。然而一旦這種暢快的授受過程成爲事實之後，教學功夫也就庶幾成爲多餘的了。」來期許教學相長。

目前教學大多是單向的，老師通常給予最簡捷的解法。學生也大都期待抄寫記憶老師提供簡捷速成的解法。如此形成所謂的「題海戰術」，老師講很多，學生抄寫記憶很多，花費相當多的精神時間做很多題目但不懂自己到底怎麼思考的。能像鎮中如此不計較我是國中老師，而與我腦力激盪者如鳳毛麟角。記之以爲念。