

小數除法的學與教

劉曼麗^{1*} 侯淑芬²

¹ 國立屏東教育大學 數理教育研究所

² 高雄市立十全國民小學

壹、前言

本文承接「學生的小數概念」(劉曼麗, 2005)、「小數的教學活動」(劉曼麗和侯淑芬, 2005) 以及「小數乘法的學與教」(劉曼麗和侯淑芬, 2007) 等三篇文章，繼續探討小數運算的最後一個主題－小數除法。同樣地，我們先探討學生對小數除法（包括文字題和計算題）的理解情形，找出學生的錯誤想法和迷思概念，再針對學生主要的錯誤想法和迷思概念提出一些在教學上的看法，以供教師們參考。

貳、學生的小數除法概念

本節是從國科會研究計畫「九年一貫數學領域分數與小數能力指標的詮釋：子計畫三－小數」中擇取部份重要結果，針對學生在小數除法文字題與小數除法計算題兩方面的答題表現說明學生在學習小數除法概念的理解情形。該研究使用所發展的試題於民國 93 年 3 月進行施測，施測學生是由北部、中部、南部的城鄉學校中選取而來。這些學生是接受九年一貫暫行綱要的數學領域課程。施測人數包括三年級 291 人、四年級 352 人，五年級 764 人和六年級 543 人。由於小數除法大部分的教

材皆安排在六年級，故施測對象僅有六年級學生。

一、學生在小數除法文字題的表現

小數除法文字題依照被除數與除數的數值可分成「整數÷整數」、「小數÷整數」、「整數÷小數」以及「小數÷小數」等四類，茲將學生在此部份的 6 題（試題 1~試題 6）答題表現整理於下頁。

試題 1~3 為整數除以整數，試題 4 為小數除以整數，而試題 5 則為整數除以小數以及試題 6 是小數除以小數。其中，試題 2、試題 3 以及試題 6 皆為被除數小於除數的問題。從試題 1~3 的答題表現來看，學生在前兩題的答對率分別為 64.3% 和 60.6%，而在試題 3 却降為 25.2%。從學生的錯誤情形來看，前兩題大都是計算發生錯誤，但試題 3 却有 30.8%（答案為 8）的學生因以「大的數÷小的數」而犯錯。細究之下發現，試題 2 和試題 3 雖同為「小的數÷大的數」的問題，但由於試題 2 是學生最熟悉的分東西情境，所以學生較能區分出何數應為被除數和何數應為除數，也因而不會受到「大的數÷小的數」的迷思概念所影響；或者是，學生也有可能是將先出現的數當做被除數而後出現的數當做除數，因而答對。

* 為本文通訊作者

試題 1： 貝克漢將 16 公升的可樂分裝在 5 個大杯子，每個大杯子裝_____公升的可樂（請以小數表示）。

答題結果：

年級	答案	3.2	16.5	5.16	0.3125	其他
六	*	64.3%	1.7%	1.5%	1.7%	30.8%

*者為正確答案

試題 2： 老師把 14 公斤重的糖果平分給 200 個小朋友，每個小朋友可得_____公斤重的糖果（請以小數表示）。

答題結果：

年級	答案	0.07	0.7	0.14	其他
六	*	60.6%	3.3%	2.0%	34.1%

試題 3： 600 條相同的繩子共長 75 公尺，請問一條繩子長_____公尺（請以小數表示）。

答題結果：

年級	答案	0.125	75.600	600.75	8	其他
六	*	25.2%	0.7%	0.9%	30.8%	42.4%

試題 4： 如果將一條 2.48 公尺長的繩子等分成 20 份，請問其中的一份繩子長多少公尺？(① $(20+2.48)$ 公尺 ② $(20-2.48)$ 公尺 ③ (2.48×20) 公尺 ④ $(20 \div 2.48)$ 公尺 ⑤ $(2.48 \div 20)$ 公尺)。

答題結果：

年級	答案	①	②	③	④	⑤	空白
六	*	1.5%	1.1%	3.9%	9.8%	83.6%	0.1%

試題 5： 如果 0.8 公斤的麵粉賣 24 元，要買一公斤要付多少元？(① $(24+0.8)$ 元 ② $(24-0.8)$ 元 ③ (24×0.8) 元 ④ $(24 \div 0.8)$ 元 ⑤ $(0.8 \div 24)$ 元)。

答題結果：

年級	答案	①	②	③	④	⑤	空白
六	*	2.8%	0.9%	36.3%	44.9%	13.6%	1.5%

試題 6： 如果一包糖果重 0.6 公斤，0.15 公斤重的糖果是幾包？(① $(0.6+0.15)$ 包 ② $(0.6-0.15)$ 包 ③ (0.15×0.6) 包 ④ $(0.6 \div 0.15)$ 包 ⑤ $(0.15 \div 0.6)$ 包)。

答題結果：

年級	答案	①	②	③	④	⑤	空白
六	*	1.5%	2.9%	42.9%	21.4%	30.8%	0.5%

從試題 4 的答題表現來看，學生的答對率高達 83.6%，顯示大多數學生對於此類小數除以整數的問題能選擇正確的算式，不過仍有 9.8%的學生選擇「大的數÷小的數」（選項④）的答案。從試題 5 和試題 6 的答題表現來看，學生的答對率僅有 44.9%和 30.8%。從學生的錯誤情形來看，在試題 5 和試題 6 分別有 13.6%和 21.4%的學生雖選擇除法運算符號，卻將被除數與除數的位置弄錯。經訪談發現，在試題 6 弄錯被除數與除數的學生多有「大的數÷小的數」的迷思概念。訪談案例舉隅如下：

試題 6 之訪談案例

R：為什麼要用 $0.6 \div 0.15$ ？

S：因為算除法時要用比較大的數除以小的數。

R：為什麼算除法時一定要用比較大的數除以小的數？

S：嗯…，要這樣才可以除，如果除數比較大就不能除了。

另外，值得一提的是，有此迷思概念的學生若再加上有以小數點後的位數多寡來決定數值大小的迷思概念，也可能歪打正著，選擇了正確答案 $\textcircled{5}$ $0.15 \div 0.6$ ，訪談案例舉隅如下：

試題 6 之訪談案例

R：為什麼要用 $0.15 \div 0.6$ ？

S：因為 0.15 的小數點後面有 2 個數，0.6 的小數點後面只有 1 個數，0.15 比較大。

R：然後呢？

S：接著我用大的數除以小的數。

此外，在試題 5 和試題 6 也分別有 36.3%和 42.9%的學生選擇了「x」作為運

算符號。在試題 5 中，學生可能是受到「乘變大、除變小」的迷思概念影響，因為考慮所求結果會比 0.8 公斤的錢多，因而選擇了「x」作為運算符號。而在試題 6 中，學生可能是因較難掌握包含除問題的語意，誤判此題為「如果一包麵粉重 0.6 公斤，0.15 包麵粉重幾公斤？」這類的問題，因而選擇了「x」作為運算符號。不過，在教學現場，我們也看到一些有「乘變大、除變小」迷思概念的學生，又有以小數點後的位數多寡來決定數值大小的迷思概念，故在認為 0.15 大於 0.6 的情況下，加上考慮所求結果會比 0.6 公斤重，因而選擇了「x」作為運算符號。

整體而言，六年級學生在除法文字題的表現不佳，學生易受到「被除數要比除數大」或「乘變大、除變小」的迷思概念影響而犯錯。在除數為純小數的問題，此種錯誤更為明顯。由此顯示學生對於除數為純小數的除法意義理解不夠。

二、學生在小數除法計算題的表現

小數除法計算題依照被除數與除數的數值，可分為「整數÷整數(商為小數)」、「小數÷整數」以及「小數÷小數」等三類。至於「整數÷小數」的計算問題可同時透過「整數÷整數(商為小數)」和「小數÷小數」的計算問題略窺一二。另外，針對除不盡的問題，我們又可細分為兩類，一類為以四捨五入法取商到指定位數的問題，另一類為求商到指定位數並寫出餘數的問題。茲將學生在此部份的 7 題（試題 7~試題 13）答題表現整理於下頁。

試題 7： $16 \div 20 = ()$ (請以小數表示)。

答題結果：

年級 六	答案 0.8	0.16	0.2	其他
	* 74.2%	0.9%	0.2%	24.7%

試題 8： $24 \div 400 = ()$ (請以小數表示)。

答題結果：

年級 六	答案 0.06	0.6	0.24	0.4	其他
	* 64.3%	3.1%	1.1%	0.4%	31.1%

試題 9： $52 \div 7 = ()$ (以四捨五入法取商到小數第一位)。

答題結果：

年級 六	答案 7.4	7	7.5	8	7.42	其他
	* 68.3%	16.0%	1.1%	0.9%	0.7%	13.0%

試題 10： $9.5 \div 6 = ()$ (以四捨五入法取商到小數第一位)。

答題結果：

年級 六	答案 1.6	2	1.5	1.57	其他
	* 61.5%	16.0%	2.6%	0.7%	19.2%

試題 11： $17.12 \div 8 = ()$ 。

答題結果：

年級 六	答案 2.14	214	0.214	21.4	其他
	* 83.2%	1.5%	0.7%	0.4%	14.2%

試題 12： $8.51 \div 2.3 = ()$

答題結果：

年級 六	答案 3.7	37	0.37	370	其他
	* 65.6%	7.2%	5.7%	0.4%	21.1%

試題 13： $4.17 \div 1.3 = () \dots ()$ (商算到小數第一位，並求出餘數)

答題結果：

年級 六	答案 3.2...0.01	3.2...0.1	3.2...1	32...1	其他
	* 34.1%	9.2%	8.7%	0.9%	47.1%

試題 7、試題 8 和試題 9 為整數除以整數，試題 10 和試題 11 為小數除以整數，而試題 12 和試題 13 則為小數除以小數。從學生的答題表現來看，被除數與除數毋需移位，且被除數不需補 0 即可除盡的問題（試題 11），學生的答對率最高，為 83.2%。推究其因，學生只要類推整數除法經驗，再將商點上小數點（對齊被除數小數點）就能成功解題。然而，對於被除數末位需「補零」的問題（試題 7~試題 10）以及被除數與除數需「移位」的問題（試題 12 和試題 13），答對率就降低了。其中，在試題 7，因被除數末位僅需補上一個 0 便可除盡，對學生而言難度較低，故答對率尚有 74.2%；但在試題 8，因被

除數末位需補兩個 0 才可除盡，答對率便降了一成，為 64.3%。而試題 9 和試題 10 又因屬於除不盡的問題，需將商取概數，因此答對率也不高，分別只有 68.3% 和 61.5%。至於試題 13，除了需移位計算外，且又屬於除不盡的問題，需將商算到指定位數，並寫出餘數，答對率僅僅 34.1%，相較試題 12（同為移位問題）的答對率（65.6%）足足低了三成之多。

從學生的錯誤情形可以發現，對於可除盡的問題，學生的錯誤主要為計算錯誤，但也有少部分的錯誤為未將商點上小數點（在試題 11 填答 214、試題 12 填答 37）或將商對齊移位前的小數點（在試題 12 填答 0.37），如下圖 1 和圖 2。

$$8.51 \div 2.3 = (\underline{3} \underline{7})$$

圖 1

$$8.51 \div 2.3 = (\underline{0} \underline{3} \underline{7})$$

圖 2

7) $52 \div 7 = (\underline{7})$
(以四捨五入法取商到小數第一位)

圖 3

8) $9.5 \div 6 = (\underline{1} \underline{5})$
(以四捨五入法取商到小數第一位)

圖 4

而在除不盡且需以四捨五入法取商到指定位數的問題，學生的錯誤主要可分為兩類，一是誤解以四捨五入法取商到小數第一位的語意，將商求到小數第一位就四捨五入，如下圖 3 和圖 4。

另一類學生雖能將商求到小數第二位後四捨五入，卻寫出餘數，如下圖 5 和圖 6。

至於在除不盡且需求商到指定位數並寫出餘數的問題，學生的主要錯誤除了如上述有關商的小數點處理錯誤外，又多了有關餘數小數點的處理問題。有的學生是未將餘數點上小數點，如下圖 7 和圖 8。

有的學生則是將餘數的小數點對齊移位後的小數點，如下圖 9。

除此之外，我們也發現，有些學生是受到四捨五入題目的影響，在有餘數的問題中，也會以四捨五入法處理商並寫下餘數，而商的小數點位置弄錯又是另一錯誤，如下圖 10（餘數正確）和圖 11（餘數有錯）。

其中，也有部分學生是將商和餘數求到小數第二位後，除了先以四捨五入法捨去 2 並取商為 0.3 外，再將 2×13 產生的 26 擦掉，然後寫下餘數 0.27，如圖 12（在圖 12 中的學生原始解題記錄裡，我們分別看到小數第二位為 2 和 27 之後為 26 的擦痕，但經掃描後擦痕變得較不清楚）。

$$(7) \quad 52 \div 7 = (7.4 \dots 0.06)$$

(以四捨五入法取商到小數第一位)

圖 5

$$8) \quad 9.5 \div 6 = (1.6 \dots 0.02)$$

(以四捨五入法取商到小數第一位)

圖 6

$$10) \quad 4.17 \div 1.3 = (3.2) \dots ()$$

(商算到小數第一位，並求出餘數)

圖 7

$$10) \quad 4.17 \div 1.3 = (3.2) \dots ()$$

(商算到小數第一位，並求出餘數)

圖 8

10) $4.17 \div 1.3 = (3.2) \dots (0.1)$
 (商算到小數第一位，並求出餘數)

$$\begin{array}{r} 3.2 \\ 1.3 \overline{)4.17} \\ 39 \\ \hline 27 \\ 26 \\ \hline 1 \end{array}$$

圖 9

10) $4.17 \div 1.3 = (0.3) \dots (0.01)$
 (商算到小數第一位，並求出餘數)

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ 1.3 \overline{)4.17} \\ 39 \\ \hline 27 \\ 26 \\ \hline 1 \end{array}$$

圖 10

10) $4.17 \div 1.3 = (0.3) \dots (1)$
 (商算到小數第一位，並求出餘數)

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ 1.3 \overline{)4.17} \\ 39 \\ \hline 27 \\ 26 \\ \hline 1 \end{array}$$

圖 11

10) $4.17 \div 1.3 = (0.3) \dots (0.27)$
 (商算到小數第一位，並求出餘數)

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ 1.3 \overline{)4.17} \\ 39 \\ \hline 27 \end{array}$$

圖 12

由上所述，我們發現學生是混淆了「以四捨五入法取商到小數第一位」和「商算到小數第一位，並寫出餘數」兩者的意涵，解題時張冠李戴，因而錯誤百出。整體而言，六年級學生在小數除法計算題的表現不太理想。學生的主要錯誤在於處理商和餘數的小數點，由此顯示學生對於如何處理小數點的原則理解不夠。

參、小數除法的教學

從上節學生的答題表現可知，學生在

判斷除數為純小數文字題的運算符號上有困難的，而在商和餘數小數點的處理上也有問題。以下便針對除數為純小數的小數除法意義以及小數除法計算時商和餘數小數點的處理原則和意義，提出一些在教學上的看法，以供教師們參考。

一、小數除法意義的教學

小數除法主要可分為除數為整數和除數為小數兩部分。除數為整數的問題可視為整數除法經驗「將結果量等分向內尋

求單位量」的延伸，因此學生在運算符號的選擇上較無困難，較常錯的反而是在被除數與除數的選擇上，學生常弄不清哪個數當被除數和哪個數當除數。在此建議教師布題時應調整被除數與除數出現的順序，避免每個題目都是先出現的數做為被除數。此外，一些布題敘述中也應刪除如「等分」、「平分」等關鍵字，以檢驗學生對除法意義的掌握，例如：

布題：相同糖果 3 包共重 4.8 公斤，請問一包重幾公斤？

12 條等長的繩子共長 75 公尺，請問一條繩子長幾公尺？

再者，教師還可布一些「小的數÷大的數」問題以檢驗學生是否具有「大的數÷小的數」的迷思概念。例如：

布題：600 條等長的繩子共長 75 公尺，請問一條繩子長幾公尺？

而在除數為小數的問題，尤其在除數為純小數的部份，由於與整數除法意義完全不同，學生很難判斷這類問題為除法問題。我們建議教師應循序漸進幫助學生建立除數為純小數的除法意義。

1. 提出單位量未知的純小數倍問題，透過乘除互逆的概念，引導學生列出除法算式。

教師先提出單位量未知的純小數

倍問題，例如：「哥哥錢的 0.2 倍是 100 元，哥哥有多少錢？」，若學生有小數倍的概念便能列出 $(\quad) \times 0.2 = 100$ 的算式填充題。接著教師只要複習乘除互逆的概念，學生應能了解哥哥的錢可用 $100 \div 0.2$ 來計算。

2. 引入除數為純小數的除法問題，透過小數倍的概念，幫助學生列出除法算式。

教師可引入除數為純小數的除法問題，例如：「0.4 公斤重的麵粉賣 20 元，買一公斤麵粉要付多少錢？」，此時，教師可透過小數倍的概念，引導學生思考：「0.4 公斤是 1 公斤的 0.4 倍，0.4 公斤麵粉賣 20 元就是 1 公斤麵粉價錢的 0.4 倍賣 20 元，所以 1 公斤麵粉的價錢就是以『 $20 \div 0.4$ 』來計算」，如圖 13。

3. 配合對比整數除法的線段圖讓學生了解「除以整數」與「除以純小數」意義的差別。

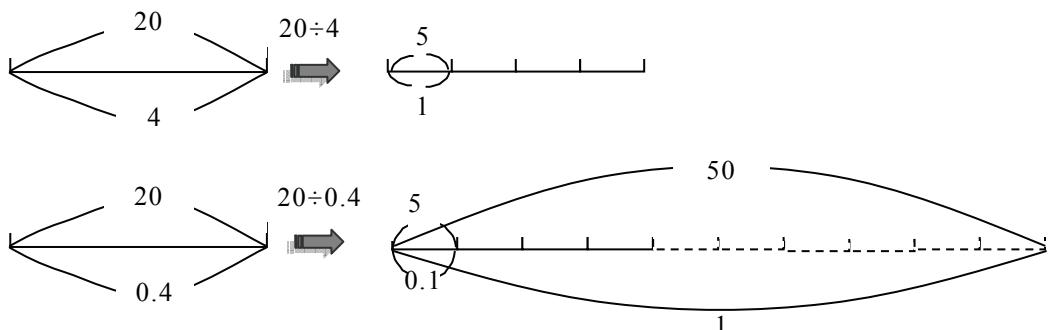
當學生能將除數為小數的除法問題以除法算式表示後，教師可配合對比整數除法的線段圖讓學生了解「除以整數」與「除以純小數」意義的最大不同在於：前者是將結果量等分向內尋求單位量，而後者是將結果量等分找出較小的單位量後，再將小單位量累成單位量。茲將前後兩者的差異圖示如圖 14。

重量		價錢
0.4 公斤	= >	20 元
↓是		↓是
1 公斤的 0.4 倍	= >	(1 公斤的價錢) 的 0.4 倍
$\Rightarrow 1 \text{ 公斤的價錢就是 } (20 \div 0.4) \text{ 元}$		

圖 13

布題：「哥哥錢的 **4 倍** 是 20 元，哥哥有多少錢？」

「哥哥錢的 **0.4 倍** 是 20 元，哥哥有多少錢？」



4 倍為 20 元 \Rightarrow 20 元為單位量 4 所對應的數值， $(20 \div 4)$ 即可算出單位量所對應的數值。

0.4 倍為 20 元 \Rightarrow 20 元為 0.4 所對應的數值，先以 $(20 \div 4)$ 求出小單位量 0.1 所對應的數值，再將小單位量累成單位量，即將 $(20 \div 4)$ 的結果再乘以 10 即可求得。

圖 14

上述線段圖也可說明除以純小數所得的商會比被除數大的原因。

除數為純小數的除法意義，並非三言兩語就能解釋清楚，教師應仔細地處理這部分的教學，幫助學生了解純小數除法的意義。千萬不要只是教導學生：「你只要把問題中的小數換成整數來想，如果是除的，那就是用除的」這樣的解題技巧。否則一旦小數乘除法問題同時出現，學生恐怕就更分不清楚何時該用乘法，何時該用除法了。

二、小數除法計算的教學

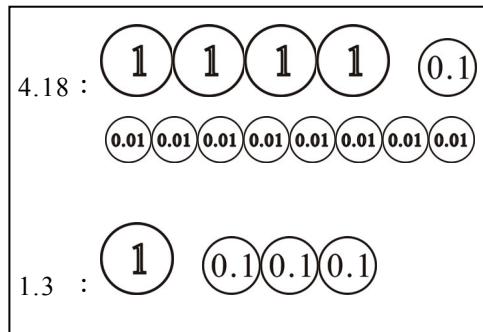
從上節學生的表現來看，學生學習小數除法計算的困難在於商的小數點與餘數的小數點如何處理，尤其是在解決除不盡的問題上，這類的困難就更為顯著。小數除法的直式計算與整數除法直式計算雷同，差別僅在於小數點的處理。很多教師便要求學生直接記憶算則，學生在不明就裡的情況下，常常弄不清楚商與餘數的小數點到底要對齊被除數移位前的小數點還是移位後的？在此建議教師進行此部分的教學時能透過大小單位轉換的活動，讓學生理解商與餘數小數點的處理原則。

1. 讓學生操作具體物解決除法問題，產生將大單位換成小單位的需求。

教師可提供學生熟悉的具體物(如小方塊、百格板、橘色積木或錢幣圖片等)，讓學生從操作的過程，產生大單位要換成小單位的需求感。以布題「4.18 公斤的巧克力，每 1.3 公斤要裝

成一包，全部裝完，共可裝成幾包？」為例，教師可提供圖卡，請學生表徵出 4.18 與 1.3。

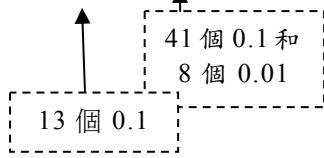
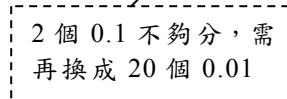
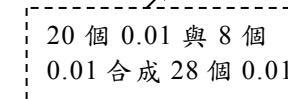
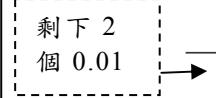
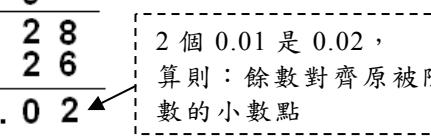
接著，教師可請學生操作圖卡解決問題，待學生察覺困難時，再提問：「將 4.18 和 1.3 換成什麼比較有利於解題呢？」。透過全班討論與操作，讓學生理解需將 4.18 和 1.3 換成同樣的小單位 (0.1 或 0.01) 才有利於解題。



接著，教師可請學生操作圖卡解決問題，待學生察覺困難時，再提問：「將 4.18 和 1.3 換成什麼比較有利於解題呢？」。透過全班討論與操作，讓學生理解需將 4.18 和 1.3 換成同樣的小單位 (0.1 或 0.01) 才有利於解題。

2. 透過定位板連結具體操作過程與直式算則，進而理解商與餘數小數點的處理原則。

待學生能操作圖卡成功解題後，教師便可一步步地引導學生連結操作具體物的過程與直式算則，在這樣的過程中，教師應不斷澄清算式紀錄中各個數字的意義，幫助學生理解算則背後的原理。

<p>步驟 1</p> $\begin{array}{r} 1.3) 4.1.8 \\ \hline \end{array}$ <div style="margin-top: 10px;"> <p></p> </div>	<p>步驟 2</p> $\begin{array}{r} 3 \\ 1.3) 4.1.8 \\ - 39 \\ \hline 2 \end{array}$ <div style="margin-top: 10px;"> <p></p> </div>	<p>步驟 3</p> $\begin{array}{r} 3. \\ 1.3) 4.1.8 \\ - 39 \\ \hline 28 \end{array}$ <div style="margin-top: 10px;"> <p></p> </div>
<p>步驟 4</p> $\begin{array}{r} 3.2 \\ 1.3) 4.1.8 \\ - 39 \\ \hline 28 \\ - 26 \\ \hline 2 \end{array}$ <div style="margin-top: 10px;"> <p></p> </div>	<p>步驟 5</p> $\begin{array}{r} 3.2 \\ 1.3) 4.1.8 \\ - 39 \\ \hline 28 \\ - 26 \\ \hline 0.02 \end{array}$ <div style="margin-top: 10px;"> <p></p> </div>	

待學生熟練小數除以小數而商為一位或二位小數等之直式算則計算後，便可結合四捨五入法，引導學生將商取概數。值得注意的是，教師一定要強調將商取概數的意義即在以大概的數表示除法結果，此時已經沒有寫出餘數的必要了。從上節學生表現中便可見到，學生極易寫出如 $9.5 \div 6 = 1.6\dots 0.02$ 的答案。另外，建議教師應協助學生澄清將商取概數的數學語意，如「以四捨五入法取商到小數第一位」，讓學生明白計算此類問題時需算到指定位數的下一位後再四捨五入，以免學生因誤解語意而犯錯。同樣地，我們在上節學生的表現中，也發現學生對此一數學語意不是很清楚，因而產生的錯誤有好幾種類。最後，建議教師特別說明「以四捨五入法取商到

小數第幾位」和「商算到小數第幾位，並寫出餘數」兩者的差異，以避免學生混淆。

肆、結語

本文透過 13 個問題和學生的答題結果來說明學生的小數除法概念。整體而言，學生不易掌握除數為純小數的除法意義，且容易受到「大的數 \div 小的數」或「乘變大、除變小」迷思概念的影響，因而在除法文字題的列式上產生困難。此外，學生在處理小數除法計算問題時，容易在商和餘數小數點的處理上產生錯誤。基於此，本文也針對小數除法教學提出一些建議。在小數除法意義的教學方面，教師可先提出單位量未知的純小數倍問題，透過乘除互逆的概念，引導學生列出除法算

式，再引入除數為純小數的除法問題，幫助學生建立除數為純小數的概念。其次，配合對比整數除法的線段圖讓學生了解「除以整數」與「除以純小數」意義的差別。在小數除法計算的教學方面，我們建議教師可先讓學生操作具體物解決除法問題，產生將大單位換成小單位的需求，再透過定位板連結具體操作過程與直式算則，進而理解商和餘數小數點的處理原則。

參考文獻

- 劉曼麗（2005）：學生的小數概念。*科學教育月刊*，276，2-10。
- 劉曼麗和侯淑芬（2005）：小數的教學活動。*科學教育月刊*，277，25-32。
- 劉曼麗和侯淑芬（2007）：小數乘法的學與教。*科學教育月刊*，297，37-44。