
小寶貝，我把數學變簡單了！—— 從情境學習理論談數學課程設計

張英傑¹ 張素宜^{2*}

¹國立臺北教育大學 數學教育研究所

²臺北市立博愛國民小學

壹、立足台灣，放眼世界

台灣數學課程，從民國六十四年，展開課程實驗研究，成立小組，檢討台灣歷年數學課程，修訂了六十四年版國小數學課程標準。該次課程目標修訂之後，七十六年再次改編數學課程。直到在民國八十二年，歷時十八年的六十四年版數學課程，終於重新修訂為新版本，謂之「新課程」。隨後，教育部又於民國八十七年公佈「國民教育階段九年一貫課程總體綱要」，九十二年推出「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」(教育部，1975；教育部，1993；教育部，1998；教育部，2003)。台灣教學教育從八十二年版開始，一再思變，努力想找到最好的數學課程教育方向及課程結構，讓學生得到更實質的數學學習內涵。直到九十六年，又再度重新修訂九十二年「國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域」，在課程綱要中提到「課程強調以學習者為主體，以知識的完整面為教育的主軸，以終身學習為教育的目標。在進入二十一世紀且處於高度文明化的世界中，數學知識及數學能力，已逐

漸成為日常生活及職場裡應具備的基本能力。」(教育部，2007)

然而，鍾靜(2003)指出台灣的數學領域暫行綱要是否符合國際趨勢？她從Niss探討教育目標中，發現到國際上的教育目標幾乎以兒童及學生為主，教育目標重視學習者個體、數學知識形成的過程，與社會文化活動的關連，數學學習的過程，除了數學知識，還有情意、文化及社會目標要注意。

從1990年代末期開始，由於建構主義與情境化運動興起，數學教育的學習理論，開始產生重大的變革(黃永和，2007)。我們得更重視社會文化心理，來關注個體與外在世界的交互作用。學習的認知過程，一如同皮亞傑理論，注重個體的認知過程；另一部分，則開始以維高斯基理論，重新審視社會文化對個體認知的影響。

而早在1970年代開始，荷蘭的真實數學教育(RME)認為數學不能只視為一種學科來教授，而應強調數學是一種人類的活動。所以在數學教育的變革，有人開始注意到情境脈絡，對於學習學習的重要性。黃永和(2007)從維高斯基的社會文化心理學分析指出人們對於問題的產生、

*為本文通訊作者

結構形式，以及解決問題的資源與工具、喜好採行的解題策略等，都受到文化情境的影響。由此觀之，如果課程的設計過程，或者學習者思考解題的過程，能將社會情境一併列入考慮，對學生的學習，可以達到比較符合社會心理學的觀點。

另外從生態心理學的觀點，黃永和（2007）指出生態心理學也常被情境學習論者借用以說明人與環境交互作用的關係。如果學習者，可以將學習的內容，擺放在環境的觀點，學習者對於學習的遷移，與學習者所得到的學習效果，相對的會比單獨學習一個概念來得容易。

貳、從荷蘭真實數學，談情境學習

長久以來，荷蘭 Freudenthal 研究中心 (FI) 將反思、敘事、建構列為培育數學師資的三大重點。在數學課程上，所謂真實的意思，是指學生可以想像一個已經相當了解的問題。荷蘭教授 Van den Heuvel-Panhuizen(2007) 在課程的設計上，它分以微觀的了解 (micro-didactic perspective) 與宏觀的了解 (macro-didactic perspective) 分析荷蘭真實數學教育 (RME) 的發展。微觀的了解是指在單元課程設計上 (短程)，應該要注意的課題；宏觀的了解是指綜觀若干年級的課程安排 (長程)。在微觀的部分，第一個部分，荷蘭數學注重進展的基模 (progressive schematization)，也就是一開始提供一個具有情境的問題，題目的數字可能很大、很複雜，但是兒童可以依據一種非正式的策

略，解出答案。第二個部分，課程的設計上，必須使用情境脈絡，協助學生學習發展，而發展的過程，可以是任何表徵方式，不一定符合正式的解題策略。第三部分，利用一系統的連結模式，來推動了解的歷程。這些連結模式，就形成了不同了解層次之間的橋樑。宏觀的了解，必須具有整體觀，希望對於一年、二年甚至多年的數學概念發展，產生更多的連絡，讓各種學習概念，如：全數、量的實測、幾何、小數、分數、…等，均可以發展出一套教學軌道 (Tussendoelen Annex Leerlijnen, TAL) (國立教育研究院籌備處編，2007)。

綜觀上述，荷蘭真實數學，其中一個很重要的部分，是學習必須與情境脈絡相互連結，並考慮一系統的脈絡發展。課程的設計要符合情境理念，內容可以是比較大型的活動設計，用以提供孩子自行發展出自己的解題策略，不侷限於正式的解題模式。

另外，Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000) 指出荷蘭真實數學教育具有六項原則：

1. 活動原則 (Activity principle): 在 RME 教學裡，學生被視為活動的參與者，而非被動的接收者。讓學生“做中學”。這也意味著：學生在面臨問題情形時，得以以一種非正規方式處理，自發性的產生答案。因此活動設計的好壞，深切的影響學生學習的品質，也因此，活動在 RME 中扮演著重要的角色。
2. 真實原則 (Reality principle): 讓學生能

將數學應用在生活中。數學教育的目標是讓數學成為日常生活中的一項工具，用以解決生活中所面臨的種種問題。這意味著「數學是有用的」。當活動設計為一種具有脈絡的問題時，學生就可以讓數學成為一種處理事物的工具，並且成為自己內部的一種知識。

3. 層級原則(Level principle): 意指數學理解的發展和進行的歷程，它給課程長度連貫性。課程要視其脈絡，由淺而深布題。在課程脈絡中，哪些應該先學習(或是先被教授)，哪些應該後學習(放在後面教授)，這是教學上很重要的觀點。
4. 編織原則(Inter-twinement principle): 數學，作為一個學校學科，沒被分成特別的學習的部份，數學內的章節裡不能被分開。編織原則的功能是使課程之間產生連貫性。這原則不但使不同章節間的數學產生關聯，而且連結了同一章節中不同部分的數學。
5. 互動原則(Interaction principle): 數學的學習被認為是一項社會活動。教育應該給學生提供彼此分享他們的策略和發明的機會。聆聽其他人發現了什麼並討論這些發現，學生能得到改善自己策略的構想。然而，這並不表示：全班共同進行、每位學生皆遵循相同的思路、同時到達一樣的發展水平。在 RME 中，孩子們被視為獨立的個體，每人皆依循各自的學習路徑。
6. 引導原則(Guidance principle): 應給學

生一個「引導」的機會來「重新發現」數學。意指在 RME 中，教師和教育計劃在學生獲得知識的方法中，有著決定性的作用。教師們必需提供學生一個可以顯現建構過程的學習環境。一個要求為：老師們必須遠遠的就能預見哪些地方和哪些方式，可以預期學生逐漸顯現的理解力與技能。

荷蘭真實數學教育 (RME)，和數學建構主義有許多相似之處，但是建構主義取向，比較像是一個學習理論，而非教育理論。(Van den Heuvel-Panhuizen, M, 2000) 而荷蘭真實數學教育，秉著建構思想的學習觀點，進行一套有系統的教學模式，形成了國際上足以仿效的典範。其教學模式的一項論述，教學必以真實原則進行，這種真實原則，足以讓學生應付日常生活中的所面對的問題。於是我們注意到了，有關情境學習應用在課程設計的重要性。

參、何謂情境學習？

在黃永和 (2007) 對於情境學習做了以下整理分析，他指出社會實踐中的參與歷程：學習即「合法周邊參與」。也就是學習是社會實踐不可分割的一部分，反對知識可以去脈絡化。知識必須在一定的脈絡之下，使得產生。而學習即社會實踐中的「參與」。所以認知論者，他們將知識視為可以在某一情境中獲得，而且可以在另一情境中傳送的外在自存實體，就如同建構論者所認為的一般。我們的學習的軌道，是從「合法周邊參與」到「充分參與」。學

校設計學習教材，融入學習情境，讓學生從實務中，獲取建構知識與概念，方便日後融入社會時，加以運用數學知識。

而知識與技能的精熟程度，意指學習者應充分參與社群的社會文化事物。從廣泛的周邊參與，構成實務概念。在學習的機會來源採「去中心化」的結構性資源，他提到社群實務提供潛能課程(potential curriculum)，讓學習者從參與中學習實務性的課程。提供不同的情境脈絡的另一項優點，除了可以讓學生學習概念本身之外，還可以學習到一些潛在課程，也就是所謂「副學習」，在情境脈絡下的副學習，多過於一般概念的講授學習。我們可以學習經濟學、科學、自然科學等其它學科上的知識，還可以學到思考能力與實際應用的能力。

黃永和(2007)指出在學習的焦點觀之，從教學上，轉為從社群學習實務的複雜性。學習不再只是單一的個體活動，同儕之間的互動，將成為學習最佳的鷹架，提供彼此建構知識的途徑。而學習者看到的「學習課程」是由情境所形成，學習者可以看到日常實務的學習狀況，獲得學習的成功經驗。

以情境脈絡的學習理論設計出來的課程教材，提供學習者一個很好的工具管道，透過這個管道的通透性，得以學習更具實務性的活動。在實踐中談論，成員之間可以互相提醒，交換訊息，形成知識。這就是 RME 六項原則中的互動原則所指的意涵。而黃永和(2007)中提到的「參與

的效應～動機與認同的發展」，學生在充分的參與的同時，可以增加實務工作的「內在酬償」，提高自我動機，參生更高的價值感。

總體而言，情境學習，以一種情境脈絡提供學習者學習通路，可以提高學習者自己內在的學習動機，增加學習潛在課程，以及讓同儕之間互動，形成知識概念。例用實例的參與，使得學習者，從「合法的周邊參與」的角色，進入「充分參與」的角色之中。

黃永和(2007)在「思考與行動的情境性：情境認知與學習文化」中，提出了四點看法：(1)知識與學習的情境性特徵：指出知識應在特定的活動及情境產生，知識的意義構成因素，有一部分是存在世界之中，無法獨立於社會之外而產生。脫離真實情境的方式來教導抽象概念，難以在實際情境中應用。(2)知識如同「工具」：他認為學習與行動具有密切的關係，在情境中進行活動，可以讓學習成為對未來具有持續性的發展歷程。(3)學習即「涵化」：學習必須兼顧「知識」、「活動」與「文化」等三要素，不幸的，一般學生得去學習抽象的知識活動，他讓為學習必須是一種「涵化」的學習過程。也就是我們必須在有意識或無意識的情況下，獲得學習的模式與信念。(4)在「真實活動」中涵化：有意義、有目的的活動，便是「真實的」。

綜合上述，知識若要成為有意義的活動，必須使學習鑲嵌在世界之中，使用情境，讓知識得以蔓延。知識與情境是不可

分開而獨立進行，以情境學習，有助學習者提高認知發展歷程。以情境學習設計課程，可以兼顧知識、活動及文化，並且去抽象化。也因此，提供學生真實活動，比單一概念化學習，學習者更容易取得學習遷移及涵化。

除此之外，在分散性智能中，黃永和認為知識的習得，除了存在於個體本身之中，還存在於物理、社會及文化之中，可以利用科技、工具、文化及社會的，來延伸學習者的認知能力。所以，適時的應用分散性智能，可以提高學習者的學習效能。而情境學習之中，我們可以運用科技融入教學之中，使用教具操作，獲取分散性智能；加入社會情境，提升認知發展。

從黃永和（2007）對於情境學習理論的分析探討，得知知識習得，除了個體自己努力尋求，還可以透過外在環境、文化及工具等分散性智能，讓學習效果更符合實務性發展。人的智能，不僅只存在於教科書之中，如何讓知識，適用於未來的社會工作之中，情境學習，可以提升學生對於非正式思考的強化。創造出更熟練、更活化的知識，而非僵化的理論知能。也因如此，認知與學習，只有在特定的情境中才能產生意義，如果要學習與認知變為有意義的活動，真實的情境脈絡，有助學習者知識的健壯。

課程設計，教材內容與學生實際生活若能加以連結，可以讓學生產生熟悉感與親切感。（徐彪，2007）教學要學生學好數學，營造良好的情境，可以激發學生的潛

力與實踐能力，為學生的學習奠定更好的基礎。學習的過程，可以鼓勵學習進行推測與思考，讓學生從實踐中，拓展自己的學習效果。在情境學習的數學教材之中，學生比較能夠體會數學的實用價值，提高學習者學習數學的意念及企圖。

台灣的數學教材，大多以一個概念一個概念向下發展，概念的安排，依照課程綱要分布的順序，一步一步，由簡而繁。能力指標，由數學家及數學教育學家決定後，交由民間版開發教材，教材的內容，必須符合課程綱要方能通過審定。民間版教科書的內容，開始符合課程綱要要求的教學理念，「學生能力的發展始於流利的基礎運算和推演、對數學概念的理解，然後懂得利用推論去解決數學問題，包括理解和解決日常問題，以及在不熟悉解答方式時，懂得自尋解決問題的途徑。」「啓發學生自行在不同數學概念之間做連結，並連結數學與其他學習領域。學生要能將數學運用在日常生活中，學習欣賞數學、從而發展探究數學以及與數學相關學科的興趣。」（教育部，2007，p.2）民間版在編訂時，通常會將情境問題列入考慮，題型問題的安排設計，盡量符合生活情境，但是從教育部九年一貫課程綱要中「培養抽象能力基礎的生活化情境，必須隨年級的增加與學生抽象能力的提高，做合理的調整，避免讓生活情境過分干擾數學的學習。」我們得以看出，教育部一方面又不希望生活情境過分干擾數學學習。民間版的情境安排，只侷限在題目之中，並無情境脈絡的安排，學習可以是故事敘述、符合情境脈絡的

情形，在國內的各版本間，顯然缺乏。王志東（2007）指出「問題是數學的心臟」，設計情境，並非只是舉個實例而已，更重要的是引導學生進入情境之中，激發學生的問題意識。數學的學習，重在建構及數學化過程。所以我們的課程設計，可不可以不再只是一題一題單一情境的數學問題，教出一個一個數學彼此前後分離的概念？轉而以利用一個有趣的生活情境，或者想像的情境，引導學生學習的興緻，提高學習者的解題意願，讓學習者明白數學在實際生活中的價值感，激發自身對數學的興趣，提高數學情意知能。

肆、從 Mathematics in Context (MIC) 看課程設計

1991-1996 由威斯康辛州麥迪森大學數學科學教育國家研究中心發展出來 MIC(Mathematics in Context)教材，這套教材的安排，從五年級、六年級、七年級及八年級一系列設計出四十套課程內容。它的內容取向，乃是採取一套具有情境脈絡的課程設計，內含一種動態的數學課程。它以情境引導學生探求數學的過程，藉著處理問題與有意義的脈絡，去發現數學概念和習得數學的技能。

在此，取其中兩個教材的例子觀看何謂情境脈絡。以下舉的例子(表 1、表 2)，為 MIC 教材在七年級「數的趨向」的二份教材內容。

我們從以上 MIC 教材中，觀看情境課

程的設計理念與特色。得知 MIC 的設計特色為如下：

- (1) 豐富的生活情境脈絡：涵括學生可以想像的情境脈絡，單元之中，以一種情境模式，一以貫之；
- (2) 重視水平化過程與垂直化過程：水平化，連結經濟、社會、科學、自然、人文等學科內容於其中。垂直化，以連結模式，達成發展性了解，採單元安排，使其概念具前後一致性；
- (3) 多元化的題型設計：演算題，估算題，文字題，設計題目，創意題，實做活動，科學實驗等等，題型多樣化；
- (4) 開放性的問句模式：除計算題外，包含文字題，以提問引發學生思考；
- (5) 估算與計算並重：不重記憶的運算過程，採思考性的計算模式，例如以分數區域計算分數乘法，比率表計算分數除法。繁雜的計算問題，一般交給計算機處理。學生的部分，很重視事先估算，再以計算機比對其答案是否正確。

伍、小寶貝，我把數學變簡單了～ 實例操作

本著這些理念，我們可以試著將 RME 及 MIC 的精神放入課程之中，設計出屬於自己的一套教材。筆者以教學上所實施的例子，對於台灣數學課堂，如何融入情境學習舉以下的例子進行說明(表三)。

表 1

單元名稱	穀類的數量 (Cereal Numbers)	
配合年級	七年級	
連結概念	分數、百分數、比例、體積的倍數、分數的乘法、分數的除法、消費者物價指數	
	情 境 課 程 設 計	連結概念
	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 想像你到一家玉米公司當實習生，你必須到公司的各個部門見習。 ➤ 在盒裝部門，你必須學習估計全美在家庭中吃爆米花的百分比，學習計算容量，以排放大型展示模型。 ➤ 在展示部門，你必須列用玉米分配長條圖，計算出每種分配的百分率。 ➤ 在包裝部分，你要設計玉米的盒子，和家裡櫥櫃間的關係，比較大包裝和小包裝的倍數關係。 ➤ 在玉米食物部門，你要利用成分金字塔，找出穀片的配分。 ➤ 你還要到廣告部門，學習海報設計與海報印製成本之間的關係。 	百分數 百分數 體積的倍數 百分數 以分數區域表，學習分數乘法概念
	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 在市場部門，利用試用包的配分調製分量，學習一杯穀片可以做出幾包試用包。 	以比率表，學習分數的除法概念
	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 最後，談到經濟部門研究物價變動，發現爆米花與現在的物價關係。 	百分數、消費者物價指數
	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 進而論及公司勞工對於薪資與物價不符之間所產生的不滿，並要求公司調高薪水。 	百分比

表 2

單元名稱	十的乘冪(Power of Ten)	
配合年級	七年級	
連結概念	二維表格、比例、比例尺、10 的倍數、10 的指數符號、指數相加相減、科學符號表示、10 的負次方	
	情 境 課 程 設 計	連結概念
	<ul style="list-style-type: none"> ➤ 這個單元設計像是一個科學實驗，你要自己動手做一個探視器，由探視器中所看到的面積，了解你所站的距離，與所視的面積範圍之間的關係。 ➤ 你到熱氣球上，越飛越高，所看到的面積，會越來越小，學習所看到的面積，與地圖上的比例尺關係。 ➤ 當你進到外太空，你的高度會以十倍、百倍、千倍向上飛升，你如何表示高度？ 	記錄二維表格、比例 比例尺 10 的指數符號

<ul style="list-style-type: none"> ➤ 由一台十的機器，你發現機器向前轉動，指數就會增加；往後轉動，指數就會減少。(學習倍數相乘與指數相加；倍數相除與指數相減的概念) ➤ 利用太陽系的直徑，學習科學符號的記錄方法。並以科學的眼光，算出荷蘭的一座自然公園，裡頭設置太陽系的九大行星，例用比例尺，與實際得知的直徑，算出公園的模型比例是否正確？ ➤ 最後，以稀釋溶液，學習小數目的指數符號表示。 	<p>指數相加相減</p> <p>科學符號表示、比例尺、比例</p> <p>10 的負次方</p>
--	---

表 3

單元名稱	阿拉國與卡達之役	
配合年級	一年級下學期	
連結概念	數到 100、10 個一數、100 以內比大小、50 以內加法、50 以內減法	
情 境 課 程 設 計	連結概念	
<p>活動一</p> <p>阿拉國，遭受敵軍卡達攻擊，阿拉國王請求布丁國王協助，提供軍隊五十名士兵。阿拉國王命令我軍整軍備戰，第一排（一排 10 人）軍隊上前，一共來了幾名士兵？ 第二排排入，一共幾名士兵？第三排？第四排？第五排？</p> <p>布丁國的軍隊加入，加入一排，一共幾名士兵？一共幾排？第七排？第八排？第九排？第十排進入了七個人，八個人，九個人，十個人？</p> <p>敵軍卡達從海上而來，一個備有十艘船，一艘船上載了 10 個人，五艘船一共有多少人？八艘？九艘？十艘？（數到 100）</p> <p>活動二</p> <p>現在兩方軍隊開始攻擊，我方聯軍死傷 20 人，敵方死傷 15 人，請問那一個軍隊所剩的人比較多？相差幾人？</p> <p>隔了一段時間，資料顯示我方聯軍陣亡人數再多出 10 名，敵方死傷一共 25 人，請問那一方死傷人數比較多？</p> <p>最後，我方聯軍一共陣亡 35 人，敵方一共 45 人，在兩隊實力相當的情況下，敵方卡達見人數差距變大，決定撤退軍隊，現在卡達的軍隊還剩下多多人？我方的軍隊剩下多少人？</p> <p>卡達撤軍時，應準備幾艘船隻，才得以將所有的人載運回國？</p>	<p>復習舊經驗： 數到 50</p> <p>數到 100</p> <p>數到 100</p> <p>100 以內比大小</p> <p>50 以內加減、比大小</p> <p>50 以內加減、比大小</p> <p>10 個一數</p>	

陸、結語

當今台灣小學數學課程編列，仍採行單元式教材編列。雖然每個單元，均列定各個單元所要學習的概念，但各個單元都是一題一題互不相干的題型。而課程設計上，雖然也能以日常生活情境列題，但在各個單元之間，彼此卻是互不相干的情境脈絡。這種教學體系下的課程設計，缺乏單元之間的連貫性，在教學內容上，欠缺一種熱情與孩子喜歡的情境在裡面。若以台灣數學教材所呈現的方式，我們可以先教授每一個單元的單元概念，最後再以一種情境脈絡串連整個學期的課程單元，安排在學期末的一二節課進行，得以彌補台灣課程設計不足之處。我們國家可以實施的方式有二：

- (一) 純粹視作課堂活動進行：融入情境脈絡，讓學生知道學習數學的實際價值，提高對於數學學習的興趣；
- (二) 以情境脈絡設計一份期末試題：測驗學生對於一整個學期以來的學習概念是否習得，重新審視學生對於整個學習的學習狀況。

在現實層面尚未改善的教育環境之下，我們如何跳脫傳統台灣課程設計的窠臼，邁向教學的另一座高峯？觀看荷蘭在TIMSS、PISA成功的表現，成績斐然，促使我們重新思考國家內部的教學系統。以情境學習理論為基礎，融合RME（荷蘭真實數學）的學習原則，參考MIC的設計精神，他山之石可為鑑，加上台灣課程的教學理念，兩者交互影響，再創一種教學及課程的最佳模式。豐富的情境脈絡課程，可以讓學生不再視數學為可怕的一堂課。

利用情境教學，提升數學的語文領域、科學領域及社會領域。教育是百年樹人的工作，最想聽到我們的孩子快樂且天真的告訴你：「老師，上數學課真有趣！」

參考文獻

- 王志東（2007）。**數學教學中的概念教學**。淮陽師範學院教育科學論壇，四月。
- 徐彪（2007）。**數學課堂教學中的情境運用**。科學教育研究。九月。
- 國立教育研究院籌備處編（2007）。**運用科技增進數學教師專業發展—94年學術研討會專輯**。台北縣：編者。
- 教育部（1975）。**國民小學課程標準**。台北：教育部。
- 教育部（1993）。**國民小學課程標準**。台北：教育部。
- 教育部（1998）。**國民中小學九年一貫課程暫行綱要**。台北：教育部。
- 教育部（2003）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北：教育部。
- 教育部（2007）。**國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域**。台北：教育部。
- 黃永和（2007）。**情境學習理論及其對教學研究的意涵**。載於黃永和著，**情境理論與教學研究**（頁19~154）。台北市：心理。
- 鍾靜（2003）。**論九年一貫課程數學領域之暫行綱要**。**課程綱要實施檢討與展望研究會**，國立台灣師範大學。
- Encyclopædia Britannica Educational Corporation (1998). *Mathematics in Context*. Chicago, Illinois: Britannica.
- Jarman R. (2004)。**讓孩子與數學真實相遇**。台北市：洪葉文化。（李心儀、劉雲英、謝叔樺譯自：Teaching Mathematics in Rudolf Steiner School for Class I~VIII)
- Van den Heurlel-Panhuizen, M. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute Cd-rom for ICME 9. Utrecht: Utrecht University.