中學生通訊解題第六十一期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
6101

給定兩組數，A 組爲：1, 2, 3, …, 2008，B 組爲：$1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2008^2$，對於 A 組中的數 x，若有 B 組中的數 y，使 $x+y$ 也是 B 組中的數，則稱 x 爲"關聯數"。那麼，A 組中這樣的關聯數有幾個?

參考解答：

簡答： 1504 個

令 $x+y=a^2$，$y=b^2$，則 $1\le b<a\le 2008$，而

$x=a^2-b^2=(a+b)(a-b)\le 2008$

因 $a+b$，$a-b$ 同奇偶，故

$a+b\ge (a-b)+2$ 。

(1) 若 $a-b=1$，則 $a+b$ 爲奇數，且 $3\le a+b\le 2007$，於是，$a+b$ 可取 3, 5, 7, …, 2007，共 1003 個值，這時，相應的 x 也可取這 1003 個值。

(2) 若 $a-b=2$，則 $a+b$ 爲偶數，且 $4\le a+b\le 1004$，於是，$a+b$ 可取 4, 6, 8, …, 1004，共 501 個值，這時，相應的 x 也可取 8, 12, 16, …, 2008 這 501 個值。

(3) 其他情況下所得的 x 值均屬於以下情形。

若 $a-b$ =奇數，則 $a+b$ =奇數。而 $x=a^2-b^2\ge a+b\ge 3$，歸入(1)。

若 $a-b$ =偶數，則 $a+b$ =偶數。而 $x=a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 爲 4 的倍數，且 $a-b\ge 2$，$a+b\ge 4$，故 $x\ge 8$，歸入(2)。

因此，這種 x 共有 1003+501=1504 個值。

解題評註：

本題重點在奇偶性的討論。

問題編號
6102

設 a, b, c 爲正實數，求

$$\frac{2b-2c}{a+b+2c}+\frac{2a+4c}{a+2b+c}+\frac{b}{a+b+c}$$ 的最小值，並求此時 a, b, c 三數關係式爲何?

參考解答：

簡答：$-1+2\sqrt{2}$ ，$\begin{cases} a=(\sqrt{2}-1)c \\ b=c \end{cases}$ 。

1. 由變數變換法，令 $a+b+2c=x$，$a+2b+c=y$，$a+b+c=z$，且 x, y, z 亦皆爲正實數

則 $a=-x-y+3z$, $b=y-z$, $c=x-z$，且 $2b-2c=2(y-x)$，$2a+4c=2(x-y+z)$，

$b=y-z$，

故 $\dfrac{2b-2c}{a+b+2c}+\dfrac{2a+4c}{a+2b+c}+\dfrac{b}{a+b+c}$

$=\dfrac{2(y-x)}{x}+\dfrac{2(x-y+z)}{y}+\dfrac{y-z}{z}$

$=(\dfrac{2y}{x}+\dfrac{2x}{y})+(\dfrac{2z}{y}+\dfrac{y}{z})-5$

2. 再由算幾不等式，可得

$(\dfrac{2y}{x}+\dfrac{2x}{y})+(\dfrac{2z}{y}+\dfrac{y}{z})-5$

$\geq 2\sqrt{4}+2\sqrt{2}-5=2\sqrt{2}-1$。

且當 $\dfrac{2y}{x}=\dfrac{2x}{y}$，$\dfrac{2z}{y}=\dfrac{y}{z}$，即 $x=y$，

$\sqrt{2}\,z=y$ 時，上式等號成立。

因此 $\begin{cases} a+b+2c=a+2b+c \\ \sqrt{2}(a+b+c)=a+2b+c \end{cases}$，

得 $\begin{cases} a=(\sqrt{2}-1)c \\ b=c \end{cases}$ 時，原式得最小值為

$-1+2\sqrt{2}$。

解題評註：

本題重點在利用變數變換法化簡分式後，再利用算幾不等式解出最小值與 a, b, c 三數關係。

問題編號
6103

解方程組：$\begin{cases} x-y+z-w=-2 \\ x^2-y^2+z^2-w^2=-2 \\ x^3-y^3+z^3-w^3=-8 \\ x^4-y^4+z^4-w^4=-14 \end{cases}$，

求出數序組(x, y, z, w)為何?

參考解答：

簡答：(1, 0, –1, 2) , (–1, 2, 1, 0) ,
(1, 2, –1, 0) , (–1, 0, 1, 2)

解答：

【法 1】

1. $\begin{cases} x-y+z-w=-2 \text{.............}(1) \\ x^2-y^2+z^2-w^2=-2 \text{......}(2) \\ x^3-y^3+z^3-w^3=-8 \text{.......}(3) \\ x^4-y^4+z^4-w^4=-14 \text{....}(4) \end{cases}$

$(2)-(1)$：

$(x^2-x)-(y^2-y)+(z^2-z)-(w^2-w)=0$

即 $(x^2-x-3)-(y^2-y-3)+(z^2-z-3)$
$-(w^2-w-3)=0$……….(5)

$(3)-(2)-3\times(1)$：

$(x^3-x^2-3x)-(y^3-y^2-3y)+(z^3-z^2-3z)$
$-(w^3-w^2-3w)=0$

即$(x^2-x-3)x-(y^2-y-3)y+(z^2-z-3)$
$z-(w^2-w-3)w=0$ …………(6)

$(4)-(3)-3\times(2)$：

$(x^4-x^3-3x^2)-(y^4-y^3-3y^2)+(z^4-z^3-3z^2)-$
$(w^4-w^3-3w^2)=0$

即$(x^2-x-3)x^2-(y^2-y-3)y^2+(z^2-z-3)$
$z^2-(w^2-w-3)w^2=0$ ………(7)

$(7)-(6)-3\times(5)$：

$(x^2-x-3)^2-(y^2-y-3)^2+(z^2-z-3)^2-(w^2-w-3)^2=0$…………(8)

2. 令 $m=x^2-x-3$，$p=y^2-y-3$，$n=z^2-z-3$，$q=w^2-w-3$

由方程式(5)、(8)得

$$\begin{cases} m-p+n-q=0 \\ m^2-p^2+n^2-q^2=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m+n=p+q \\ m^2+n^2=p^2+q^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m+n=p+q \\ mn=pq \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m+n=p+q \\ (m-n)^2=(p-q)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} m+n=p+q \\ m-n=\pm(p-q) \end{cases},$$

所以 $m=p, n=q$ 或 $m=q, n=p$。

分兩種情形討論：

(1) 若 $m=p, n=q$，則由 $m=p$ 得 $x^2-x-3=y^2-y-3\Rightarrow x^2-y^2=x-y\Rightarrow(x-y)(x+y-1)=0$

(i) 若 $x-y=0$，代入方程式(1)中得 $z-w=-2$，

事實上，由 $n=q$，可得 $z^2-z-3=w^2-w-3\Rightarrow z^2-w^2=z-w\Rightarrow(z-w)(z+w-1)=0$

這裡 $z-w\neq 0$，故 $z+w=1$，又 $z-w=-2$，解得 $z=-\dfrac{1}{2}$，$w=\dfrac{3}{2}$，但這代入方程式(3)不合，故捨去。

(ii) 若 $x+y-1=0$，同上，由 $n=q$，可得 $(z-w)(z+w-1)=0$，又 $z-w\neq 0$(否則同情形(i)可知矛盾)，故 $z+w=1$，聯立方程式

可得 $\begin{cases} x+y=1 \\ z+w=1 \\ x-y+z-w=-2 \end{cases}$

由此可得 $y=1-x$, $z=-x$, $w=1+x$ ，

再代入方程式(3)，得

$x^3-(1-x)^3+(-x)^3-(1+x)^3=-8\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$，

因此數對 $(x, y, z, w)=(1, 0, -1, 2), (-1, 2, 1, 0)$

(2) 若 $m=q, n=p$，則類似於情形(1)可得

$\begin{cases} x+w=1 \\ y+z=1 \\ x-y+z-w=-2 \end{cases}$，並得 $y=1+x$, $z=-x$, $w=1-x$，再代入方程式(3)，得 $x^3-(1+x)^3+(-x)^3-(1-x)^3=-8\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$，

因此數對 $(x, y, z, w)=(1, 2, -1, 0)$, $(-1, 0, 1, 2)$

3. 綜合以上討論，數對 $(x, y, z, w)=(1, 0, -1, 2), (-1, 2, 1, 0), (1, 2, -1, 0), (-1, 0, 1, 2)$

【法 2】設 $a=x+z$，$b=xz$，$c=y+w$，$d=yw$，則原方程式可化爲

$$\begin{cases} a-c=-2 \\ (a^2-c^2)-2(b-d)=-2 \\ a(a^2-3b)-c(c^2-3d)=-8 \\ (a^2-2b)^2-2b^2-(c^2-2d)^2+2d^2=-14 \end{cases}$$

利用 $a-c=-2$，對其餘方程式化簡得

$$\begin{cases} a-c=-2 \\ (a-c)(a+c)-2(b-d)=-2 \\ (a-c)^3+3ac(a-c)-3ab+3cd=-8 \\ (a^2+c^2-2b-2d)(a^2-c^2-2b+2d)-2(b^2-d^2)=-14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c=-2 \\ (a+c)+(b-d)=1 \\ 2ac+ab-cd=0 \\ [(a-c)^2+2ac-2b-2d][(a+c)(a-c)-2b+2d]-2(b+d)(b-d)=-14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-c=-2 \\ a+c+b-d=1 \\ 2ac+ab-cd=0 \\ [4+2ac-2b-2d][a+c+b-d]+(b+d)(b-d)=7 \end{cases}$$

由前三式用 a 表示 b, c, d 可得 $\begin{cases} b=-1-\dfrac{a}{2} \\ c=a+2 \\ d=\dfrac{3}{2}a \end{cases}$，再代入第四式整理得 $\begin{cases} a=0 \\ b=-1 \\ c=2 \\ d=0 \end{cases}$

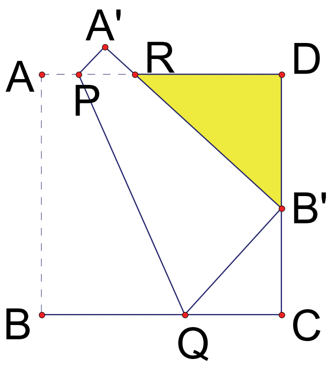
即 $\begin{cases} x+z=0 \\ xz=-1 \\ y+w=2 \\ yw=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=-1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ z=1 \end{cases}$，$\begin{cases} y=2 \\ w=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=0 \\ z=2 \end{cases}$，

因此解 $(x, y, z, w)=(1, 0, -1, 2)$, $(-1, 2, 1, 0)$, $(1, 2, -1, 0)$, $(-1, 0, 1, 2)$。

解題評註：

本題重點在對稱方程式的變數變換與加減消去法的熟練。

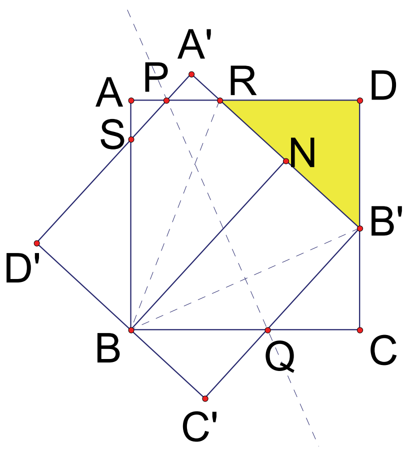
問題編號
6104



有一邊長為 1 的正方形 $ABCD$，將 B 點折至 $\overline{CD}$ 間的 B' 點（如圖），折痕為 $\overline{PQ}$，此時 A 點落於 A' 處，$\overline{A'B'}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點為點 R，則 $\Delta RB'D$ 的周長為何？

參考解答：

【法 1】（幾何）



(a) 將正方形 $ABCD$ 對 $\overline{PQ}$ 作鏡射，得到正方形 $A'B'C'D'$

因為點 B' 在 $\overline{CD}$ 上，所以點 B 在 $\overline{C'D'}$ 上（如圖）

設 $\overline{AB}$ 與 $\overline{A'D'}$ 的交點為點 S、$\overline{A'B'}$ 與 $\overline{AD}$ 的交點為點 R

$\Rightarrow \Delta B'CQ \cong \Delta BC'Q$

$\Rightarrow \overline{B'C} = \overline{BC'}$

(b) 過 B 點作一直線垂直 $\overline{A'B'}$ 於 N 點

顯然四邊形 $BNB'C'$ 為矩形

$\Rightarrow \overline{NB'} = \overline{BC'} = \overline{B'C}$

(c) 因為 $\overline{BB'} = \overline{BB'}$、$\overline{CB'} = \overline{NB'}$、$\angle BCB' = 90° = \angle BNB'$

所以 $\Delta BCB' \cong \Delta BNB'$

$\Rightarrow \overline{BC} = \overline{BN}$

(d) 因為 $\overline{BA} = \overline{BC} = \overline{BN}$、$\overline{BR} = \overline{BR}$、$\angle RAB = 90° = \angle RNB$

所以 $\Delta BRA \cong \Delta BRN$

$\Rightarrow \overline{RA} = \overline{RN}$

(e) $\Delta RB'D$ 周長 $= \overline{NR} + \overline{RD} + \overline{DB'} + \overline{B'N}$

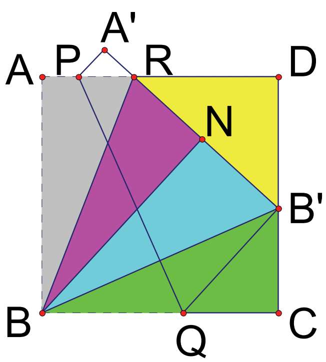
$= \overline{AR} + \overline{RD} + \overline{DB'} + \overline{B'C}$

$= \overline{AD} + \overline{DC}$

$= 1 + 1$

$= 2$

【法 2】（幾何）



(a) 作 $\overline{BN} \perp \overline{RB'}$ 於 N、連 $\overline{BR}, \overline{BB'}$（如圖）

(b) 因爲 B' 是 B 關於 $\overline{PQ}$ 的對稱點，即

$\overline{PQ}$ 是 $\overline{BB'}$ 的中垂線

所以 $\angle BB'Q = \angle B'BQ$

(c) 因爲

$$\begin{aligned}&\angle NB'B\\&=\angle NB'Q-\angle BB'Q\\&=90^\circ-\angle BB'Q\\&=90^\circ-\angle B'BQ\\&=\angle CB'B\end{aligned}$$

、

$\angle BCB' = 90^\circ = \angle BNB'$ 、 $\overline{BB'} = \overline{BB'}$

所以 $\Delta BNB' \cong \Delta BCB'$（AAS）

$\Rightarrow \overline{BN} = \overline{BC} = 1 = \overline{BA}$ 且 $\overline{NB'} = \overline{B'C}$

(d) 因爲 $\angle RAB = 90^\circ = \angle RNB$ 、

$\overline{AB} = \overline{NB}$ 、 $\overline{BR} = \overline{BR}$

所以 $\Delta ABR \cong \Delta NBR$（RHS）

$\Rightarrow \overline{AR} = \overline{RN}$

(e) $\Delta RB'D$ 周長 $= \overline{NR} + \overline{RD} + \overline{DB'} + \overline{B'N}$

$= \overline{AR} + \overline{RD} + \overline{DB'} + \overline{B'C}$ (因爲(c)、(d))

$= \overline{AD} + \overline{DC}$

$= 1 + 1$

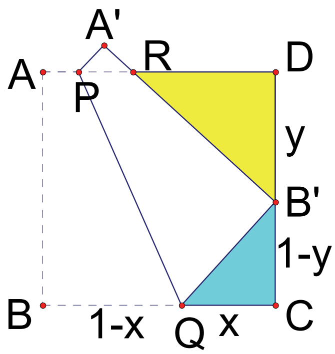
$=2$

【法 3】(代數)

假設 $\overline{CQ} = x, \overline{DB'} = y$（如圖）

即 $\overline{QB'} = \overline{BQ} = 1 - x$ 且 $\overline{CB'} = 1 - y$

因爲 $\Delta QCB'$ 是直角三角形，所以



$$(1-x)^2 = x^2 + (1-y)^2$$
$$\Rightarrow 1-2x+x^2 = x^2+1-2y+y^2$$
$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{2}{2-y}$$

因爲 $\Delta QCB' \sim \Delta B'DR$

$\Delta RB'D$ 周長

$= \Delta B'QC$ 的周長 $\times \dfrac{y}{x}$

$= ((1-x)+x+(1-y)) \times \dfrac{y}{x}$

$= (2-y) \times \dfrac{2}{2-y}$

$=2$

解題評註：

本題屬幾何的鏡射（對稱）問題，可以製造出三角形全等或相似的性質。從以上三種作法中，可以分成幾何解法與代數解法兩大類型。

從徵答的 11 位同學中，僅有三位同學嘗試使用幾何方法，有八位同學使用代數方法。可見國人較喜好代數方法，但也顯

示出幾何能力的弱勢，建議對數學有興趣的同學應對幾何領域多所涉獵，相信未來對數學能力會有很好的斬獲。

問題編號 6105

從 1 到 2008 中，至少要取出幾個偶數，才能保證其中必存在兩個數，它們的和為 2008？

參考解答：504

(1) 從 1 到 2008 中選出 2 個偶數，和為 2008 的狀況共有 501 組：
2 + 2006, 4 + 2004, 6 + 2002, 8 + 2000, …, 1000 + 1008, 1002 + 1006

(2) 根據鴿籠原理，從 2, 4, 6, 8, ⋯, 1002, 1006, 1008, ⋯, 2002, 2004, 2006 等 1002 個偶數中，至少要取出 502 個數才能保證其中必定存在兩個數，他們的和為 2008。

(3) 根據(2)，從 2, 4, 6, 8, ⋯, 1002, 1004, 1006, 1008, ⋯, 2002, 2004, 2006, 2008 等 1004 個偶數中，至少要任意取出 504 個數，才能保證其中必定存在兩個數，他們的和為 2008。

解題評註：

本題為使用鴿籠原理的標準題型，在製造籠子時，同學都有考慮到先將 1004 及 2008 這兩個數字去除掉，但是，因取到 1004 或 2008 時均無法讓兩數總和為 2008，所以最後必須將最壞的狀況考慮進來，未得滿分的同學均在這個步驟錯誤。而少算 1 或 2。