
科技融入數學課程與教學的意涵及實例

林保平

臺北市立教育大學 數學資訊教育學系

運用科技於教學中的呼籲及研究,有長久的歷史,自有電腦以來,數學家掌握電子計算有 50 多年的歷史,而教師與學生有幸使用電子計算功能,至今不超過 30 年,早期使用電子計算科技都是透過時間分享方式。微電腦的出現,打破了中央控制進入了個人化使用的時代,微電腦的普遍使用大約 20 年,從 1980 年代微電腦發展以來,科技在教育上的運用一直受到教育界的重視。1990 年代初期開始的網路技術發展,個人電腦使用的日漸普及,寬頻網路的普遍設置,更使數學教育學者及教師,對於科技在數學教學上的應用有更大的期許,融入課程的科技運用已成為未來數學教學的趨勢,本文先就科技融入數學課程的意涵,作個人意見的表達,討論科技融入數學課程的可能障礙,並簡單介紹本人從這個觀點下建立的協助課程融入的網路電腦程式。

壹、科技融入數學課程的意涵

一、協助數學教學的科技運用

可以用來協助教學的科技很多,電腦、多媒體工具、周邊設備、應用程式、衛星連線、網際網路及 WWW 網頁、視訊教學、…等都是可以運用在教學的工具或方式,有些固然尚未成熟或普及(如衛星

連線、視訊教學),但很多已經十分成熟,可以使用。這些工具或方法,為科技融入課程的教學帶來了相當多的願景,下面略述教室中可能的科技運用方式

(一) 電腦為主體的科技運用

傳統對電腦運用於教學的想法,偏重在以電腦為主體的教學,透過電腦的快速計算及展示功能,學生使用電腦,由電腦作課程內容的簡介、內容的說明及實例的呈現、透過問題作線上的評量、提供適當的回饋及增強、並根據學生需要作個別化教學的調整、記錄學生的表現等。這個想法有以電腦取代教師的意味,電腦呈現的是教師在課堂上教學的歷程。想法雖不錯,但鑑於電腦科技的限制,電腦與使用者互動的機制,如學生對問題的想法、學生思考的過程、適時的給予提示、…等都無法作得完善。早年雖有人工智慧的提倡,但其功能仍然有限,只有在技術的訓練上,如模擬的飛機駕駛訓練…等能展現其功效,理想完整的教學「專家系統」,在短期內仍無法出現,電腦仍無法取代教師的教學。但在練習、模擬、展示、線上評量(線上閱卷、對錯的回饋)、資訊及問題的呈現上,仍然可以加以利用,協助教室教學的不足。

(二) 學生為主體的科技運用

1980 初期電腦在教學上的運用，許多人的建議是「學生程式設計」。早年如 LOGO 語言中的的龜行幾何，就是以這個想法設計，學生是利用「直接指令」或「設計程式」指揮電腦畫面上烏龜的移動來解決問題。這反映了「誰教誰」的問題，這不同於更傳統「電腦指導學生學習」的想法。事實上這種想法區別了數學問題的本質，例如下列兩個問題看起來類似，但前者是特殊數值的計算，後者則牽涉到一般化的處理原則。

問題 1：給予平面上三點 $(2,3)$ ， $(-1,4)$ ，及 $(0,1)$ ，求出過此三點的圓之圓心及其半徑。

問題 2：寫一個電腦程式，當輸入三點坐標時，電腦會輸出過此三點圓之圓心及半徑。

電腦的引入提高了學生數學學習的水準。「學生程式設計」的想法是假設學生所學的認知技能可從恰當的程式設計活動中獲得，例如計畫的技能、問題破解的技能、...等。

像「微世界」(microworld)的電腦程式，則是針對特定目標限制了指令的數量及範圍，作用於特別選定要學生學習的數學物件或內容，讓學生透過程式設計來學習數學，例如 Camp & Marchionini(1984)描述的“PERGs”(Program Exercise related to Content)。

由於電腦科技的進步，書寫程式的過程逐漸被取代，Geometric Supposer (Schwartz, 1985) 首先提供「擷取操作過

程」的功能，由電腦依序將「操作的過程」建立成內涵的程序，學生利用電腦直接繪製幾何圖形後，其繪製過程可以保留且予以命名成為指令或程式，學生可不必透過書寫來發展及修改程序，替代了程式書寫的需要。其後的 Cabri Geometry (Laborde,1990)，Geometer's Sketchpad (Jackiw,1991)，繼續發展。透過「程式設計」學習數學的需要，已被電腦提供的基本作圖、計算、代數、符號微分、程序擷取功能、網路功能、可修改的網路程式所取代 (Geometers Sketchpad 第四版)。學生可透過電腦提供的這些基本功能，製作幾何及函數圖形，作數學問題的探討、定理的發現，甚至透過其「一般化功能」的協助思考問題的證明，這是以學生為主體，提供「較普遍化」的工具讓學生使用於思考解題。其他如 Mapple、Mathematia、Derive 等程式，雖然它們有些仍具程式設計的功能，但透過簡易的人機介面，及針對特殊項目的套裝程式，也提供了學生學習高等數學所需的解題工具。這種一般化且開放式的程式，本身並不針對任一數學概念進行教學，學生的使用，都需要先透過教師的教學，熟悉基本概念及功能。學生對程式的熟練與否也會影響學生解題的歷程，教師如何運用這類程式協助學生學習，影響學習成果很大，程式基本功能的學習與現行課程綱要的內容也未必一致。此外，學生透過網路搜尋及閱讀數學相關的資料、如史上發現的最大質數、勾股定理的多種證明、數學家列

傳、歷史故事、…也是學生利用科技學習的一環。

(三) 教師學生互動，科技為工具的教學運用

前述電腦為主體的科技教學運用，從以取代教師的觀點來看，要設計完整的教學歷程，雖暫不可行，但針對學生或教學個別單元的需要，將電腦做為工具，透過現成軟體的支助，教師可以運用科技進行教室教學活動設計並進行教學。例如透過單一教學目標需要（相對於前述一般化開放式程式），由教師或專家利用科技或程式軟體（如 Powerpoint, Spreadsheet, Flash, Authorware, …或前述任意程式）設計針對教學目標的教具或學具程式環境，供教師設計活動並在教室內使用。透過電腦的動態呈現及展示功能，教師的提問或協助說

明、教師與學生（學生或生間）的互動探索，電腦科技可協助教師的教學或學生的學習。例如網頁 <http://www.dynamath.idv.tw> 上的實例「3 或 9 的倍數判別」、「長條圖的形成」。透過電腦教具學具程式環境的圖形依序的展示，教師可以方便並有效率地與學生討論「如何判定某數為 3 或 9 的倍數」，透過電腦的圖像的動態呈現、教師與學生的問答及提示，教師可協助學生形成及理解「要判定某數是否 3 的倍數，只要看各數字的和相加後是否 3 的倍數即可」，圖 1 展示其程式動態依序列畫面內容的一頁。圖 2、圖 3 展示程式「長條圖的形成」動態依序列畫面內容的一頁。各動態序列內容，透過按鈕的控制，可以依序呈現，方便教師提問及教學。

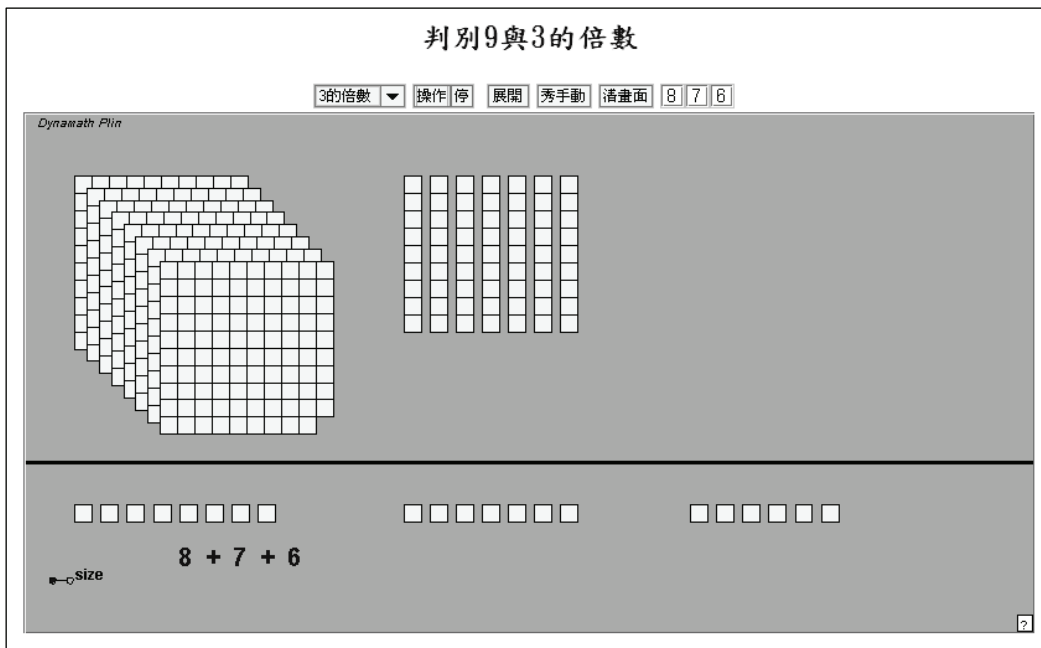


圖 1、「判別 9 與 3 的倍數」程式畫面

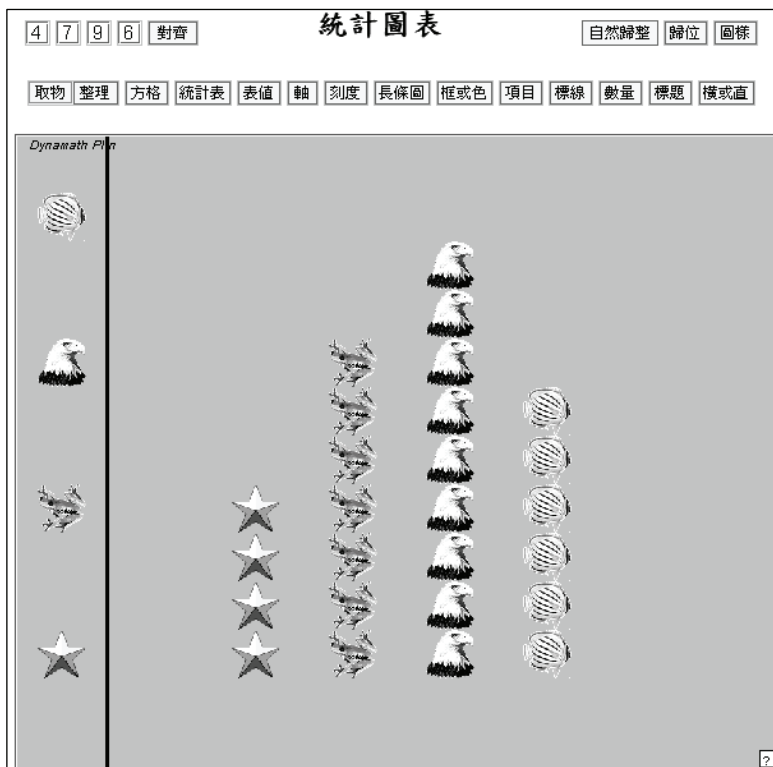


圖 2、整理後的物件

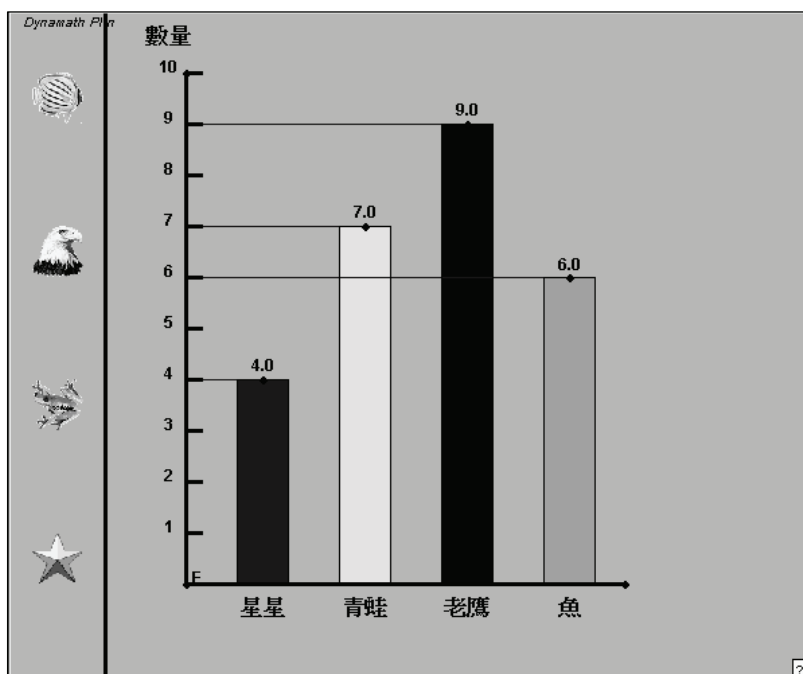


圖 3、長條圖的呈現

二、融入數學課程的科技運用

我們認為融入課程的科技運用，應是與現行課程目標及核心教材相結合的科技運用，也就是說，科技在教學上的運用，應是爲了促進學生認知，能達成課程目標且與達成目標的教材相結合，而非可有可無的附屬品。我們不否認任何科技運用均有其教育意義，但有教育意義並不表示能達成預定的教學目標。許多研究認為科技會改變教學的實務、數學問題的本質，問題理解的難易，但是我們認為它不會改變教學目標，教學目標是課程綱要明訂的內容，而科技融入課程時，教師選用科技或教學環境程式時，就已經確定了這個目標，縱使認為課程綱要明訂的目標不足或有缺陷，也是在教師自行確定增修目標使其成爲教師預期實施的課程(implemented curriculum)目標之後，才會選定要融入課程的科技，因此選定課程融入的科技協助教學，只有是否能有效達成課程目標的問題，沒有是否配合目標或教材的問題，在使用課本時，教師對於課本建議的活動及教學歷程也應事先檢視並修正，然後設計教具學具程式環境或選用適當的科技進行教學。

貳、科技融入數學課程可能的障礙

雖然使用科技協助教學已是公認爲未來教學之趨勢，但是科技在教室中的使用一直無法落實，進度緩慢。以下列出電腦較少有意義地被使用在增進教師教學及

學生學習上的原因，供大家提出討論，如何能解除這些障礙因素。

一、專業的發展

教師未曾受到恰當的訓練及支援，教師認為他的電腦技能無法勝任科技融入的教學，或認為科技融入教學的實施應是「科技專家」或「科技教師」的專長，不是他們的責任。有些教師不認為科技的運用實質上對教學有益，他不用科技可以教得更好，更有效。教師認為實施科技融入的教學將花費很多的時間及精力，沒有時間去學或發展新的東西。

二、軟體的獲得

缺乏能支援主要課程目標、能配合教學方向、且設計完整適合教室使用的軟體。教師所知、所接觸的科技及協助教學的程式，或所看到的科技融入的教學成功實例，對實際課程教學的幫助不是很大。

三、科技決策及支援

決策者或教學行政者本身沒有教學科技的技能或對教學科技認識不夠，阻礙科技融入的教學決策，未能善用經費於刀口上。教師使用科技發生問題時，由於科技的不熟悉、科技設備的不配合、網際網路連線的不確定、或科技人員無法立即支援，使教師無法全然仰仗科技來教學，對重要核心的教材不願使用科技。

四、教室的管理

集中使用的電腦教室，使用的時間必須事先作安排，使得教師將「學生使用電腦的」教學方式視爲特殊的教學活動，而

非日常課程（科技融入課程的教學）。

五、科技融入的課程

課程綱要訂定之時，為將科技融入作為重要事項，沒有提供或建議可使用的軟體。書商無法把握教師教學時必有電腦或相關科技設備，供其使用，在設計課程時，科技運用的教材付之厥如，或以「選擇教材」看待，教師無法獲得完整配合及運用科技教學的課本。教學行政人員對教師要求過多無謂的書面報告及討論，教師需花費很多額外的時間來準備科技融入課程的教學。

參、教具學具觀點的電腦輔助教學環境特質及實例

在我國，提供教室使用的電腦雖然十分有限，但是教育部班班有電腦計畫針對教室提供教師於教室內可用的電腦相關設備，每一中小學都有以寬頻（ADSL）連線上網之設備，而且電腦價格日益低廉，其功能也日漸強大，教室中有一部電腦來協助教師正常教學應不成問題（不是點綴性的展示，而是像粉筆黑板一樣的利用），但是能供教師在課室直接利用的軟體卻十分缺乏。「教具學具」觀點的電腦輔助教學（林,民 89；林,民 90），建議將電腦當作工具，教師或專家根據課程及教材內容（亦不排除非其內的素材）的特質，設計出能幫助教學的教具，或學生操作的學具，供教師及學生在教學時使用，電腦只掌控必要的「工具」，將教學流程、個別差異的考慮、教師的評量等工作，仍然交給

教師。教師教學流程之設計中，對電腦科技目前無法處理、或教師因科技能力不足無法設計、或無現成的電腦教具學具的題材或內容部分，仍採非電腦的教學方式。並且不排除其他任何非電腦提供的操作教具或學具，教師具有彈性，可斟酌使用。在這種觀點之下，電腦輔助教學之設計簡化，教師只需根據教材或可能的活動內容，充分運用電腦特性來選取或設計合適的教具及學具來輔助教學。

在這種觀點之下，電腦教學程式環境應具下列特質：

- (一) 針對數學課程中的各個主題(能作適度的橫向連結) — 這是電腦輔助教學融入課程的必要條件。
- (二) 一般化 — 相對於一般教具學具之「特殊」性，電腦教具學具程式呈現的主題內容應具有一般化的特性。例如引導面積公式時，作平行四邊形分割，所被分割的四邊形應是任意（至少是多種的）平行四邊形，這樣的分割程式，可以由教師或學生選擇或操作出不同形狀的平行四邊形作多次的分割呈現（如圖 4）。又如提供分數探討的分割程式，就應可作多種分割（若有不足，教師可彈性修改程式）。多樣性也是十分重要，例如，介紹分數時，線段分割，長條的分割，面積相關的分割（如圓形分割、矩形分割）、水杯的不同刻度分割等（如圖 5 至 7）。
- (三) 多重表徵的呈現（Kaput,1989;

Lin,1993;Lin & Olive 1994) — 程式的呈現可有多重的表徵，例如函數就可以有「代數式表徵」、「表列表徵」、「圖形表徵」，這些表徵互相對照呼應，呈現表徵內部的變換或不同表徵之間的轉譯。例如呈現二次函數的圖形，學生或教師可透過滑鼠操作圖形，觀察函數式在係數上的變化，或改變係數觀察圖形的變化，將函數圖形及函數式看成一個物件，忽略函數自變數與應變數對應的關係，提升學習研究的層次(圖 8)，分數各種型式的呈現，也是多重表徵的呈現。

- (四) 動態可操作 — 程式應能呈現動態過程，可隨意停止，繼續(相對於一般電影媒體的不易隨時反覆)，教師可於恰當的時刻暫停程式之自動運作，提出問題，發起討論，重複畫面上的動態過程，或以手動操作放慢速度，讓學生有思考、討論、提問題的機會(如圖 1)。
- (五) 自動化功能 — 在手操作困難時(例如重合或疊合兩圖形，以滑鼠運作不易精準)，可透過「按鈕」令電腦自動操作。
- (六) 使用的彈性 — 教師能根據教學設計，選擇程式中部分需要的功能，或自行設計補充的功能，或作大班教學(教師操作，學生或教師提問題討論)，或由個別或小組操作，作彈性的設計調配，以適應學生的程度或個別需求。

(七) 不排他除種教學媒體或具體教具及學具的使用。

電腦教具學具將數學抽象後的符號或圖像化後的圖形，更具體化，在教師或學生操作之下，透過教學問答或小組討論，應可協助學生具體及抽象的連結，能對技融入的數學教學有重要影響，值得我們研究討論。

以下舉出四個實例供大家參考(所舉實例中，前 3 例可閱網站 <http://www.dynamath.tw> or <http://www.dynamath.idv.tw>)。

一、3 或 9 的倍數及長條圖的形成

圖 1 中，教師可以選擇討論 3 或 9 的倍數。右上方輸入框可輸入要判別的任意 3 位數。本程式中，「操作」是一個連續按鈕，設計時已將教學流程安排好，教師只要依序按此按鈕呈現畫面即可，但在呈現圖形的內容之前提出問題、引導學生討論。其基本流程是：取得 876 的方塊表徵、討論是否可以 3 個 3 個一數數完及它與除法的關連、分別就每個百及每個十來數、數完的放在上方、未數的(剩下的)放在下方，最後把尚未數的合起來，再數，能正好數盡，則 876 是 3 的倍數，否則不是 3 的倍數。按鈕「展開」是討論將第一個「百」及第一個「十」是否可數盡時，可將積木「展開」成 3 個一堆或 9 個一堆(再按就合併回去)，方便看出剩下幾個數不完，可與學生討論除法與「是否數盡」之關係。

圖 2 展示的是統計圖表教學時的的教具程式。教師可以透過按鈕依自行設計的流程教學。按鈕大部分是輪換按鈕，按一下呈現、再按一下則隱藏。我們設計了教學時可能要使用到的各種功能按鈕。

1. 取物 — 按鈕程式將自動取得適當數量且隨機排列的物件，圖中四個數值輸入框，可分別鍵入規劃取得四種物件的數量。
2. 整理 — 按鈕可將物件整理成如圖 2 中的排列（教學時，可先用滑鼠移動並分類物件，讓學生數算分類）。
3. 歸位 — 還原物件至左邊的四個位置。
4. 圖樣 — 按鈕可將四種物件，變成四種不同顏色的方格（成爲長條圖形成的提示），在按鈕可還原爲四種物件。
5. 統計表、表值 — 呈現或隱藏統計表、呈現或隱藏表內的數量。
6. 長條圖 — 將整理的物件展示出長條圖的樣式。
7. 橫或直 — 輪換呈現橫向或直向的長條圖。

其他如坐標「軸」、「刻度」、「標題」、「項目」名稱、「數量」、標示數量的「標線」、中空或塗色的長條圖（「色或框」）等都是可呈現或隱藏的按鈕，方便教師在提出「需要」之討論之後予以呈現。

圖 3 展示長條圖的部分要件，此時，教師尚可移動長條圖上方的點，上下移動改變長條圖的高，數值也會隨著改變（此時的數量就不是開始時的數量，也可以是非整數）。

本例這些按鈕也可以如倍數程式一樣，依流程將按鈕合製成一個「連續按鈕」，教師再依序按鈕教學，哪一種模式較佳值得研究。

二、面積公式的探討

在探討國小面積相關概念時，討論完長方形面積公式之後，通常要透過切割、拼補、或複製來探討平行四邊形、三角形、梯形等的面積公式。圖 4 呈現展示平行四邊形切割拼補成矩形的切割及拼補過程。透過電腦程式的呈現，教師可以呈現多種切割的方式，也可以切割各種不同位置不同形狀的平行四邊形。按鈕合併圖形固然方便，教師也可透過滑鼠移動圖形，作手操作的拼合活動。本程式也可以將平行四邊形改變爲梯形、三角形，進行複製拼補的活動來探討三角形及梯形的面積公式。這些圖形的高，都是因爲求面積之需要而定義的，程式展示的高及整體的切割拼合活動都具有一般性。

三、分數的基本概念

在國小分數教學時，適當的等分割，多種不同的分割等，常是黑板展示圖形最困難之處，圖 5、圖 6 展示了線段分割、長條板（長矩形）分割、圓形分割的程式實例。分割之後，仍然呈現原始「全部」（未分割時）的基本狀態。3 個四分之一合成 1 個四分之三也十分容易呈現。

圖 7 展示兩個大小相同的量杯，使用者可以在這兩個量杯上製作等分割的刻度，並設定水位來探討分數的意義、等值

分數、並比較分數的大小。對 1 至 12 的刻度，每一刻度可再作 2~5 格的分割，對分割數小的分割，學生可透過刻度的細分來探討分子分母同乘一個數的意義；對分割數大的分割（圖 7），學生可以討論分割的合併，看哪哪一種合併是適合的（分子分

母能同時除盡），這是連結因數倍數概念，探討等值分數的意義，進而協助學生瞭解「分子、分母同乘以或同除以一個數」的分數擴分及約分的意義。

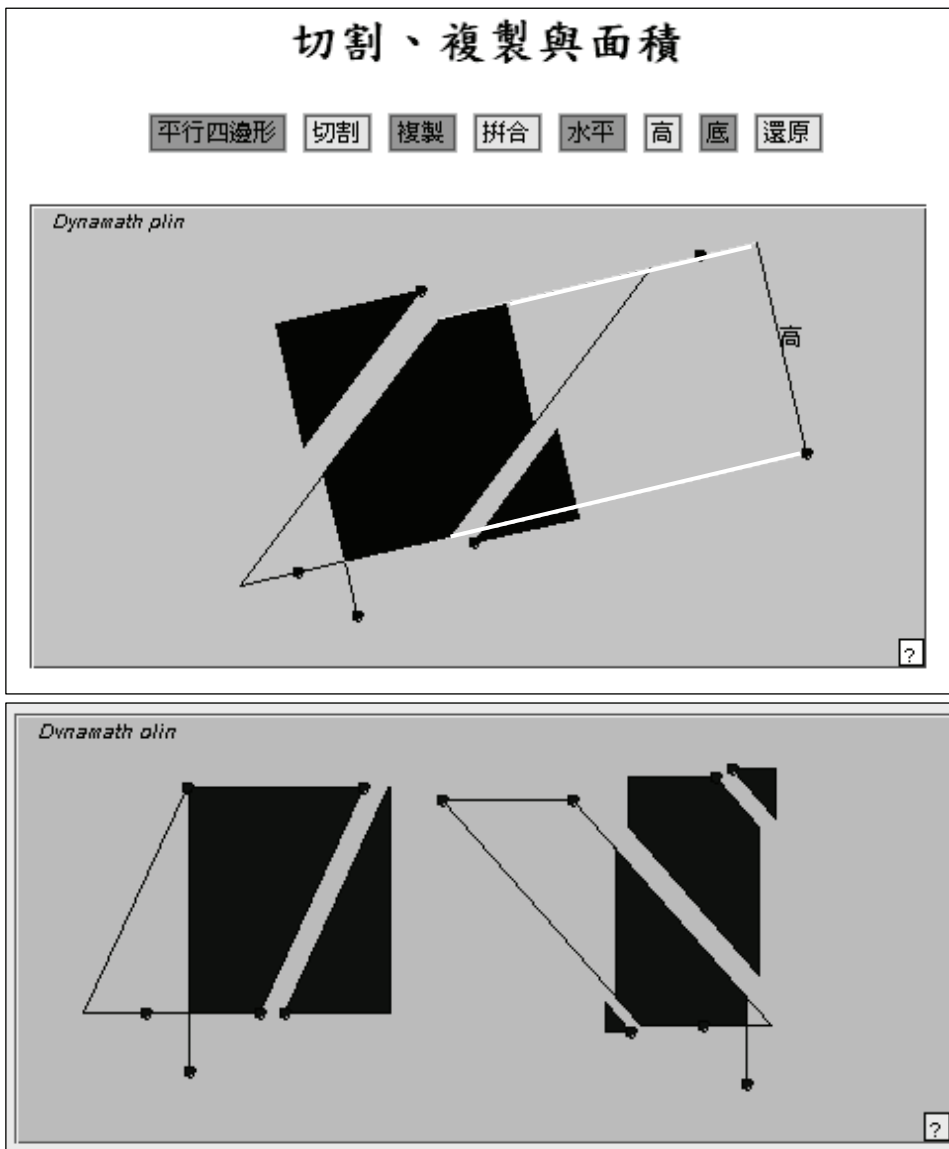


圖 4、平行四邊形的切割拼補及其面積公式

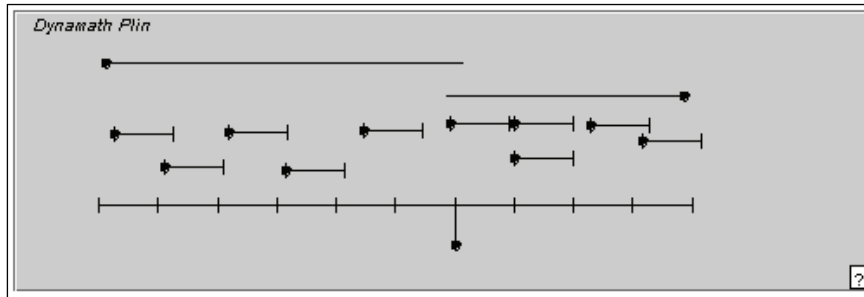
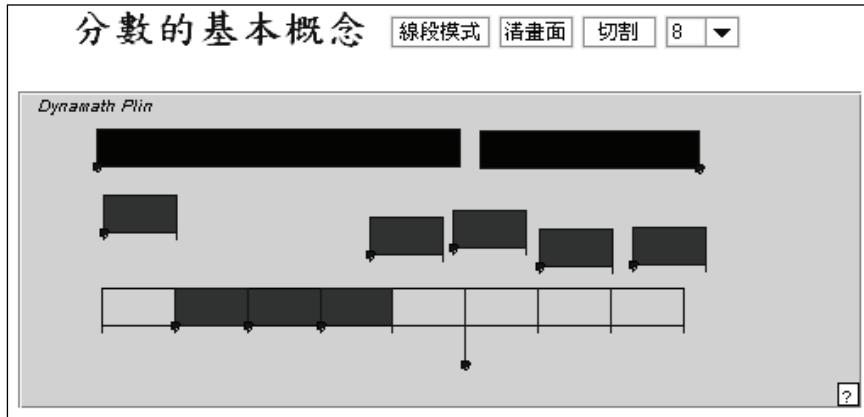


圖 5、矩形模式（8 等分及 $\frac{5}{8}$, $\frac{3}{8}$ 的分割）及線段模式（9 等分及 $\frac{5}{9}$, $\frac{4}{9}$ 的分割）

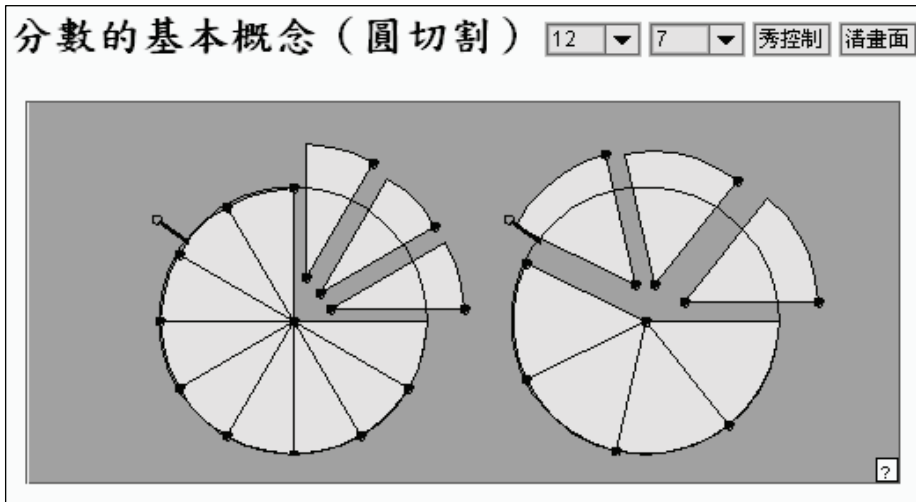


圖 6、圓模式的分割（12 等分及 7 等分的分割）

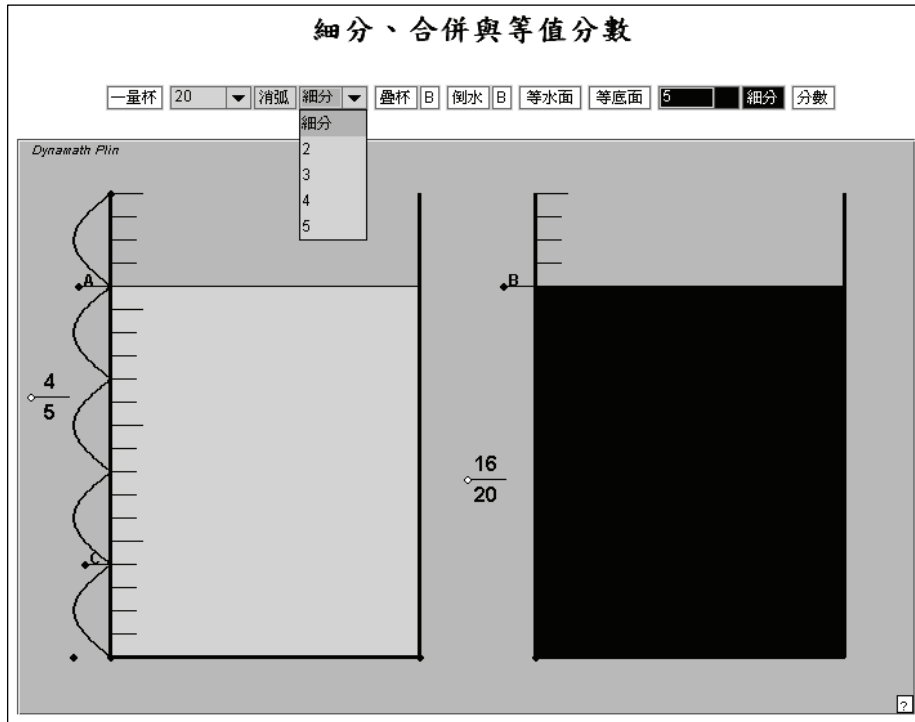


圖 7、合併以觀察分數的分子分母同除以一個數的意義

四、函數的多重表徵

函數概念的教學牽涉到函數的多重表徵。函數基本上有表格數列表徵、圖形表徵、代數式表徵。表格數列表徵強調函數的對應性質，一個 x 值，恰有一個 y 值與其對應；圖形表徵展示函數整體的呈現；代數式表徵是符號運算式的表徵。這些表徵的學習，是函數概念學習的重要內容。而學生函數概念的發展也是透過對應關係、逐漸進化到圖形呈現，並連結到代數呈現的領域。探討這些表徵之間的關連性也是數學學習的重要議題。圖 8 是一個函數畫圖程式，同時呈現函數的多重表徵，可以探討表格中的對應數值、函數圖

形、代數式間的關係。教師可透過輸入或選取內建的含 a, b, c, d 參數（有預設值）及自變數 x 的代數式來畫圖及描點。參數 a, b, c, d 之值可以直接輸入或透過上下箭頭按鈕增減其數值，此時函數圖形可以作相應的改變，可以讓學生探討係數變化與圖形變化之間的關係。圖 9 呈現內建的頂點式二次函數的代數式。另有如 $y = a|x - b| + c$ 、 $y = ax^2 + bx + c$ 、 $y = a \sin(b(x - c)) + d$ … 等內建函數式，可供學生討論絕對值函數、標準式二次函數、三角函數、… 等函數式係數與圖形形狀間的關係。

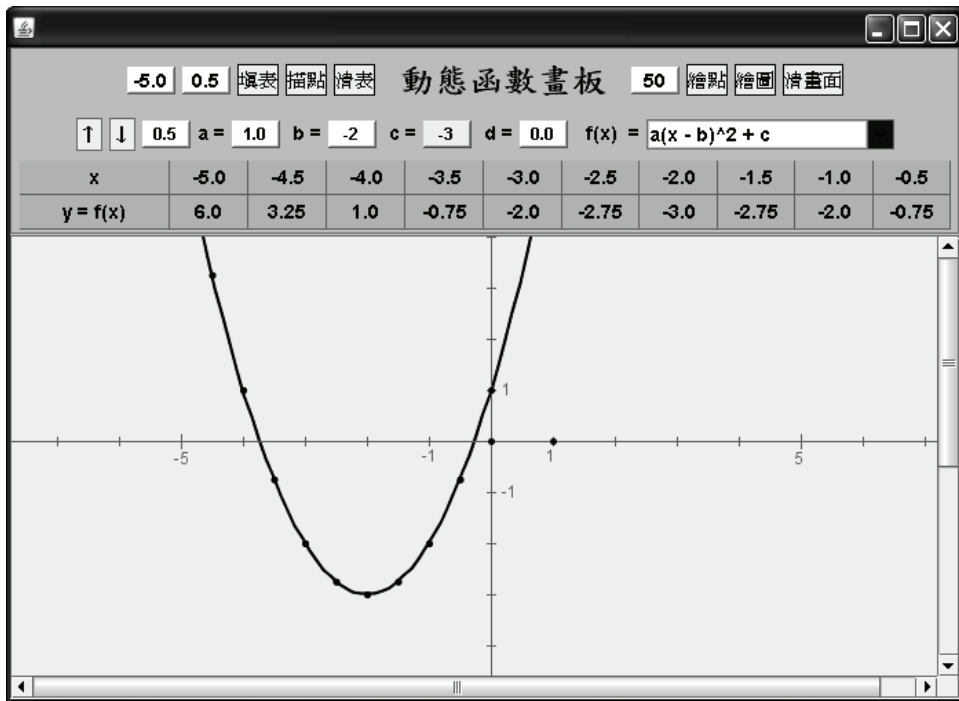


圖 8、多重表徵的函數呈現：透過輸入 x 值獲得函數 y 值及函數表列，以便描點；選取或輸入帶參數 a,b,c,d 的函數式，透過參數（係數）的變化改變圖形的形狀，觀察圖形與係數的關係。

肆、結語

本文首先討論科技融入課程的意涵，從科技協助教學、學生利用科技、及教室中教師學生互動、科技為工具等方向來探討，認為融入課程的科技運用，應是與現行課程目標及核心教材相結合的科技運用，也就是說，科技在教學上的運用，應是為了促進學生認知，能達成課程目標且與達成目標的教材相結合。本文也討論科技融入課程的可能障礙，這些障礙，這些應會隨遮科技的進步、價格的降低，逐漸減少。本文也提出教具學具觀點的電腦輔助教學環境的設計的想法，並舉了一些實例。這些實例只是我們網頁上眾多實例的一小部分，希望對有興趣

運用科技融入教學的教師有幫助。網頁上的許多實例，目前已經改組為可以下載並運用的模組，有興趣的教師可以下載實驗使用。這些程式大部分沒有作過嚴密及正式的教學實驗，錯誤及不盡理想之處在所難免，拋磚引玉，就教於有興趣的教育工作同仁。

參考文獻

- 林保平 (民 90) 融入教學的數學科電腦輔助教學—以分數的教學為例。科學教育研究與發展，第二十二期，pp31-57。
- 林保平 (民 89) 教具學具觀點的數學科電腦輔助教學設計實例。科學教育研究與發展，第二十期，pp29-46。
- Camp, J., & Marchionini, G. (1984). Programming and learning:

- Implications for mathematics education. In V. P. Hanson (Ed.), *Computers in mathematics Education*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Jackiw, N. (1991). *Geometer's Sketchpad* (Computer program). Berkeley, CA: Key Curriculum Press.
- Laborde, J. M. (1990). *CABRI Geometry {Software}*. France: Univerdite de Grenoble 1 (Available in the U.S. from Brooks Cole: NY).
- Lin, P. P. (1993). *Learning Translation and Scaling in Dynamic, Linked, Multiple Representation Environments*. Doctoral dissertation. The University of Georgia.
- Lin, P. P. & Olive, J. (1994). *Dynamic, Linked, Multiple Representation Environments Using the Geometer's Sketchpad*. The Proceeding of the 9th Science Education Conference of The Republic of China, pp.714-744.
- Schwartz, J., & Yerushalmy, M. (1985). *The Geometry supposer [A series of foru software packages]*. Pleasantville, NY: Sunburst Communications.