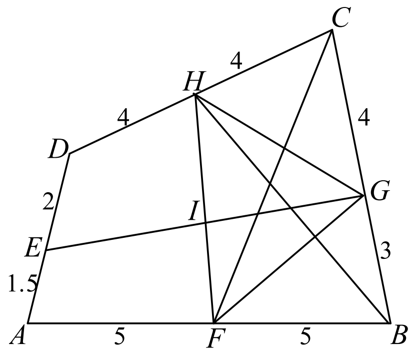
中學生通訊解題第六十期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
6001

在四邊形 $ABCD$ 各邊取一點 E、F、G、H，若 $\overline{DH}=4$，$\overline{HC}=4$，$\overline{AF}=5$，$\overline{FB}=5$，$\overline{DE}=2$，$\overline{EA}=1.5$，$\overline{CG}=4$，$\overline{GB}=3$，如圖，試証：$\overline{IE}=\overline{IG}$，$\overline{IF}=\dfrac{3}{4}\overline{IH}$



參考解答：

令 ΔBFH 之面積 $=\alpha$，ΔCFH 之面積 $=\beta$，$\square BCHF$ 之面積 $=\gamma$，

則 $\Delta FGH=\square BCHF-\Delta CGH-\Delta BFG$

$$=\gamma-\frac{4(\gamma-\alpha)}{7}-\frac{3(\gamma-\beta)}{7}$$

$$=\frac{4\alpha+3\beta}{7}=\frac{4}{7}\Delta BFH+\frac{3}{7}\Delta CFH，$$

但 $\Delta AFH=\Delta BFH$，$\Delta DFH=\Delta CFH$

$$\Rightarrow \Delta EFH=\frac{4}{7}\Delta AFH+\frac{3}{7}\Delta DFH$$

$$=\frac{4}{7}\Delta BFH+\frac{3}{7}\Delta CFH=\Delta FGH$$

$\Rightarrow \overline{IE}:\overline{IG}=\Delta EFH:\Delta GFH=1:1$

$\Rightarrow \overline{IE}=\overline{IG}$

同理 $\overline{IF}:\overline{IH}=3:4 \quad \Rightarrow \overline{IF}=\dfrac{3}{4}\overline{IH}$

解題評註：

這是一個基本定理型的的問題，可延伸處理凸四邊形各邊分點連線分割面積的問題。本題的解法只需用到基本的面積比的概念即可，上述詳解供各位參考。

問題編號
6002

已知多邊形 $ABCDEFGHIJK$ 中，

$\overline{AK}\,//\,\overline{FG}\,//\,\overline{BC}$，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，

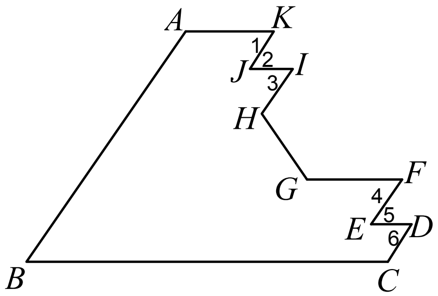
$\angle FGH=120^0$，

$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=\angle 5=\angle 6=60^0$，

$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，

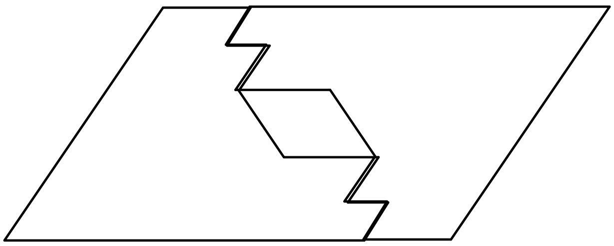
$\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{HI}=\overline{IJ}=\overline{JK}=1.5$

$\overline{AK}=\overline{FG}=\overline{GH}=3$，則此多邊形之面積=？



參考解答：

將相同的兩個多邊形 $ABCDEFGHIJK$ 拼成一個平行四邊形，如圖所示：



此平行四邊形之兩鄰邊夾角 60^0，其長度分別爲 9、12，但會有 1 個邊長爲 3、一內角 60^0 的菱形(=2 個正三角形)缺口

⇒ 此多邊形之面積

$$= \frac{1}{2}[15 \times 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2]$$

$$= \frac{135-9}{4}\sqrt{3} = \frac{63}{2}\sqrt{3}$$

解題評註：

這是一個測試「求面積的方法」的問題，想瞭解同學們是以何種角度來處理面積問題，本題來應徵答同學中大多是用分割法處理，也有同學用割補法解題，只有一位同學是用旋轉法處理，最令人激賞。上述詳解法即是旋轉法，僅供各位參考。

問題編號
6003

在 10×10 的正方形棋盤(每個小方格顏色黑白交錯)上任取 46 個互不相鄰的小方格，求證其中至少有 30 個小方格同色。

參考解答：

(1) 先證明一引理：

在 5×5 的正方形棋盤內任意去掉 4 個方格後，餘下部分中至少有 15 個方格是彼此相連的。

證明如下：

X				
	X			
		X		
			X	

從 5×5 的正方形棋盤內任意去掉 4 個方格後，其上至少有 1 行和 1 列的各 5 個方格均未被去掉(9 個方格)，若還有 1 行或 1 列方格是完整的，則顯然成立。否則，另外的 4 行和 4 列都各被去掉 1 個方格，故沒有方格被去掉的那一行所在的連通部分中，至少有 9+3+2+1=15 個方格。在必須切割爲兩個連通區域的方法中，如圖即爲最少方格連通的狀況。

(2) 將棋盤分成 25 個 2×2 的正方形，每個 2×2 的正方形視爲一個大方格，將選定的 46 個方格標上星號，則每個大方格

中至多有 2 個星號，故至少有 21 個大方格中各有兩個星號，且這兩個星號所在的方格同色。

(3) 由引理知，這 21 個大方格中至少有 15 個彼此相鄰，再由已知條件知，相鄰兩個大方格中的 4 個星號所在的 4 個方格同色，從而這 15 個大方格中的共 30 個星號所在的方格都同色。

解題評註：

本題答題的同學較少，答題較為完整之同學皆使用與解答相似的做法：

(1)先分割為 2×2 方格之 5×5 棋盤

(2)再嘗試從連通性來討論

有些同學嘗試用操作的方法來說明，例如：全部先選取同一顏色之方格，再往顏色均分的目標操作，但因無法清楚說明方法之完整性，所以皆被扣分。

問題編號
6004

試求出最小的正整數 n，使它的立方的末四位數字為 456。

參考解答：

逐一從個位、十位、百位來討論：

計算 $0^3, 1^3, \cdots\cdots, 9^3$，得知若 n^3 尾數要是 6，n 的尾數一定要是 6，

因此可設 $n = 10k + 6, (k \in N \cup \{0\})$

再考慮十位數：

計算 $n^3 = (10k+6)^3$

$$= 1000k^3 + 1800k^2 + 1080k + 216$$

因此若 n^3 末兩位數要是 56，$1080k$ 末兩位一定要是 40，可得

$k = 5t + 3 (t \in N \cup \{0\})$

得　$n = 10k + 6 = 10(5t+3) + 6$

$= 50t + 36 (t \in N \cup \{0\})$

(i)　$t = 0, n = 36, n^3 = 46656$

(ii)　$t = 1, n = 86, n^3 = 636056$

(iii)　$t = 2, n = 136, n^3 = 2515456$

故 136 為所求最小的正整數

解題評注：

同學大致上都是用上述的解法，惟計算量較大有些同學會計算錯誤。當然在最後一步，也可以仿照個位及十位的作法討論百位的部份。

事實上題目有一個小錯誤：末四位數字為 456，有人解讀為筆誤，題目應為末三位數字為 456；但也有同學依照原題目，解讀為末四位數字為 0456，那做出來的最小正整數為 1386。

問題編號
6005

是否存在一個常數 c，使得對於任意正整數 x、y，不等式

$$\frac{x}{3x+y} + \frac{y}{x+3y} \le c \le \frac{x}{x+3y} + \frac{y}{3x+y}$$

恆成立。

參考解答：

【解一】

(1) 因為 $3x^2+3y^2\ge 6xy$，所以

$$\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}=\frac{x^2+6xy+y^2}{3x^2+3y^2+10xy}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\frac{8}{3}xy}{3x^2+3y^2+10xy}$$

$$\le \frac{1}{3}+\frac{\frac{8}{3}xy}{6xy+10xy}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

(2) $\frac{x}{x+3y}+\frac{y}{3x+y}$

$$=2-3\left(\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}\right)\ge 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

由(1)(2)可知取 $c=\frac{1}{2}$，即

$$\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}\le\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+3y}+\frac{y}{3x+y}$$

【解二】

考慮

$$\left(\frac{x}{x+3y}+\frac{y}{3x+y}\right)-\left(\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}\right)$$

$$=\frac{2(x-y)^2}{3x^2+10xy+3y^2}$$

所以當 $(x-y)$ 愈大時，

$\left(\frac{x}{x+3y}+\frac{y}{3x+y}\right)-\left(\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}\right)$的

值愈大，因此先考慮當 $x=y$ 時，發現

$$\frac{x}{x+3y}+\frac{y}{3x+y}$$

$$=\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}=\frac{1}{2}$$

取 $c=\frac{1}{2}$ 代入原式驗證：

$$\left(\frac{x}{x+3y}+\frac{y}{3x+y}\right)-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3x^2+2xy+3y^2}{3x^2+10xy+3y^2}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{3(x-y)^2}{6x^2+20xy+6y^2}\ge 0$$

$$\frac{1}{2}-\left(\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{x^2+6xy+y^2}{3x^2+10xy+3y^2}$$

$$=\frac{(x-y)^2}{6x^2+20xy+6y^2}\ge 0$$

所以可知

$$\frac{x}{3x+y}+\frac{y}{x+3y}\le\frac{1}{2}\le\frac{x}{x+3y}+\frac{y}{3x+y}$$

恆成立。

解題評註：

本題需要對分式的化簡熟練，再利用算幾不等式解出(解一)或是經由特殊化獲得 c 值後再檢驗(解二)。