圖在幾何解題中所扮演的角色

翁立衛

國立臺灣師範大學 科學教育研究所

壹、前言

圖是數學解題過程中重要的輔助工具，許多解題文獻指出解題者透過畫圖以瞭解題意或觸發相關知識(Polya, 1957；Schoenfeld, 1979, 1980；Mason, Burton & Stacey, 1982)，更有所謂的圖解法，即強調畫圖本身就是一種解題的方法(龐之垣，1999)。幾何學是一門探討空間關係與邏輯推理的數學，幾何問題多以文字敘述題意，畫圖的目的在於表徵題目所呈現的空間關係並轉換成比較容易處理的表徵(Carney & Levin, 2002)。本文針對幾何圖形的特質、解題者如何從圖中獲取資訊的過程及圖對於解題的助益與阻礙等議題進行探討，希望能對於幾何解題與教學有所貢獻。

幾何解題中的圖包含了題目本身的附圖和解題者在解題過程中所畫的草圖(drawing)。圖是一種經過高度選擇的表徵形式，這種表徵能夠幫助解題者獲取資訊以及便於理解與記憶資訊(Lowe, 1994)。圖能輔助學習與解題；一個好的圖勝過千言萬語，透過簡單的線條與空間關係，傳遞特定的數學意義，其中可能包括代數、函數、幾何與統計等關係(Larkin & Simon, 1987；Arcavi, 2003；Roth & Bowen, 2003)。圖同時具有圖像的(figural)特質與概念的(conceptual)特質，圖像的特質是指大小、形狀、顏色等感官特性，而概念特質係指與圖形所涉及與概念有關的抽象特質；前者有助於心象的形成，後者則和計算與邏輯推理有關(Fischbein, 1993; Presmeg, 1986)。雖然幾何學中的圖形可由實體的觸發而辨識，但圖形和真實世界之間並不存在對應實體，它是由定義所控制、受制於概念的影像(Fischbein, 1993, p.141)。

從圖中獲取並解譯訊息的過程稱爲讀圖 (Friel, Curcio & Bright, 2001；Shah & Hoeffner, 2002；Roth & Bowen, 2003)，Roth & Bowen (2003)指出每一個圖形都有一組可供理解與解譯的四元參數關係(four-parameter relation)，分別是內容、符號、情境脈絡與規則。當讀圖者缺乏對特定表徵、規約與情境脈絡的理解以及解譯的彈性時，讀圖活動將宣告失敗。

讀圖活動中有兩個重要的成分：結構化與解譯(Roth & Bowen, 2003, p. 239；Bishop, 1989)。結構化動作先於解譯的動作，結構化的目的在於找尋一組適合解譯的四元參數組，在找尋合適的四元參數組失敗或是先前所顯露的符號、內容與推論和個人現存的認知相衝突時，讀圖者會反覆重複結構化的動作，回頭找尋具有意義

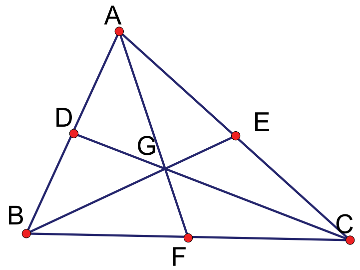
的新元素；解譯圖形的過程不僅是一個推論的過程，更是一個反複辯証的動作，隨情境(參考物)與圖形(符號)相互調整而逐漸穩固，符號及其組成要素並不是立即可見的，而是隨著結構化的過程中，越來越多的細節被顯露而發現的(Roth & Bowen, 2003)。Friel 等人(2001)建議先從整體視覺結構上解譯圖形，並辨認出某些規則，再從圖形結構性質上判斷這些規則是否具有量或質的意義，最後將這些圖形特質轉換成概念關係，解釋該圖形各部分間符號與圖形關係是否相符，並建議透過(自我)提問方式確認讀圖者所需要的知識與圖中所提取的訊息之間是否有差距與衝突。

圖的表徵與解釋的威力在於它的簡約性(Lowe, 1994)，讀圖者在找尋合適的四元參數組之敗之後，舊的資訊陳列在圖形上，如果不除去這些舊資訊或重新建構，讀圖者可能無法迅速從這個受到干擾(污染)的圖中找到新的元素，亦可能因此連結錯誤訊息以致產生錯誤推論(Presmeg, 1986)，影響讀圖的結果，建議適時重新畫圖以解決此類的問題(Polya, 1957；Lawson & Chinnappan,1994)。讀圖過程中需要保持解譯彈性(Roth & Bowen, 2003)，必要時可考慮重組視界與增加輔助線(Yerushalmy & Chazan, 1990)。

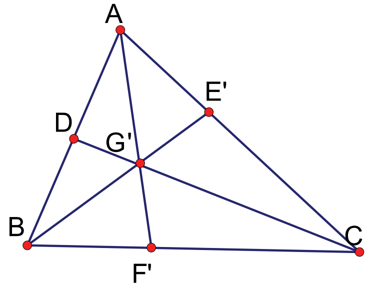
一個讀圖的例子

接下來，擬藉由實例說明幾何解題中圖所扮演的角色，並彙整前述論述，介紹幾何解題中的圖與讀圖過程。

圖一是三中線 $\overline{AF}$ 、 $\overline{BE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於一點 G 的情況，在固定 $\overline{CD}$ 的情況下，略將交點 G 沿 $\overline{CD}$ 往 D 方向移動，移動過程中仍保持 $\overline{AF'}$ 、 $\overline{BE'}$ 與 $\overline{CD}$ 三線共點，如圖二所示。試問：圖二中△AG’E’的面積會等於△BG’F’嗎？



圖一



圖二

從視覺整體上看，這兩個圖均是由六條線段(符號)構成，其中三條線段構成三角形的外框，另外三條線段交於內部一點，顯示這兩個圖的內容和三角形與三條截線段共點有關，雖然視覺符號與內容接近，但涉及的(概念)脈絡卻有差異：圖一的 G 點是重心，具有等積關係(△ADG 面積= △BDG 面積=△BFG 面積=△CFG 面積=△CEG 面積=△EAG 面積)，但圖二的 G’不是重心，不能將所有的等積關係直接”轉譯”至圖二 (如：△ADG’面積＝

△BDG’面積，但△G’F’B 的面積不一定等於△BDG’面積)，須謹慎尋找解譯圖形的四元參數組。

兩圖中三線共點的事實和許多幾何知識或問題有關，這些知識將構成圖的情境脈絡，從圖一來看，至少有三個不同的情境脈絡，一是從中線的概念出發，中線是一條劃分”等積”關係的截線，可透過共邊關係及等量公理，可推得等積關係；二是從中點的概念出發，D,E,F 是各邊中點，在同底等高的情況下，能保證兩兩面積相等(如△ADG 與△BDG)，利用兩邊中點連線平行第三邊與平行線間距離相等的性質推得△ABF 與△ABE 爲等積關係，再利用等量公理，推得△AGE 與△BGF 等積關係，同理可得六個三角形的等積關係；三是從三線共點的特殊性出發，孟氏(Menelaus)定理與西瓦(Ceva)定理則是描繪三線共點的重要工具，可透過定理與計算得到等積關係，在引用西瓦定理時，已經將面積觀點轉換至線段觀點來解譯問題。

在題目條件改變(圖形性質改變)之後，三條中線只剩下一條，情境脈絡也隨之改變，但『三線共點的特殊性』這個規則並沒有變(這是個有用的訊息)，顯示西瓦(Ceva)定理可繼續使用，列式並推得：

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} \times \frac{\overline{BF'}}{\overline{F'C}} \times \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{BF'}}{\overline{F'C}} \times \frac{\overline{CE'}}{\overline{E'A}} = 1 \quad \Rightarrow \frac{\overline{BF'}}{\overline{F'C}} = \frac{\overline{E'A}}{\overline{CE'}}$$

$$\Rightarrow \overline{E'F'} \text{平行} \overline{AB}$$

這個結果”無意間”連結至上述第二條脈絡，在平行線間距離相等與同底等高的情況下，得到△ABF’與△ABE’面積相等，利用等量公理，可推得△BF’G’與△AE’G’的等積關係。

從以上說明可知：(圖二)△BF’G’與△AE’G’的等積關係卻是建立在 $\overline{E'F'}$ 與 $\overline{AB}$ 平行關係上。要"讀”出 $\overline{E'F'}$ 平行 $\overline{AB}$ 的關係，雖然能從視覺直觀上引發，但不容易從現有的知識脈絡解釋，要解譯出這層關係，必須重組四元參數組，重新組合上述三條脈絡，這意味著重組視界的重要。這個例子說明看似微小的視覺(圖象)改變，卻能引起概念(脈絡)的巨變。

在解題過程中，解題者必須以現有的知識技能理解問題情境，直到能解決已知條件與目標之間的張力與模糊爲止(Nunokawa, 1994, 1997, 2004)，在幾何解題過程中，爲了找出合適的脈絡框架以理解問題情境，提取有用的資訊運用於解題，解題者可視實際需要改變圖形或重新畫圖，直到解題者可以利用現有的知識與技能並透過圖來理解問題，直到解決爲止(Polya, 1957；Nunokawa, 1994, 1997, 2004)。

幾何問題本身可能主導該用何種”框架”來解譯題目所呈現的圖，以本題爲例，本題和面積有關，從面積觀點或和面積”接近”的觀點(例如：長度或共角關係)出發找尋有用的資訊，似乎比較合理，不過，從其他觀點出發，亦可能得到意想不到的結果，解題者應保持解譯的彈性，避免心智功能的執著(鄭昭明, 2006)。

貳、圖用於幾何解題的功能

許多解題文獻常建議解題者『畫個圖』以瞭解題意，畫個圖是幾何解題中重要的啓思法之一(Polya, 1957；Schoenfeld, 1979, 1980；Mason, Burton & Stacey, 1982；Nunokawa, 1994, 2004)，Parzysz (1991, p.591)更直言：有效的解題方式即是和圖形進行沒有耗損或扭曲的訊息交流。解題活動中繪製草圖至少有下列四種功能：一、減少解題時的認知負荷；二、觸發解題時所需的相關知識；三、促進問題情境的理解；四、輔助組織解題資訊。

一、減少解題時的認知負荷

幾何問題多以文字敘述題意，畫圖的目的在於轉換成比較容易處理的表徵(Carney & Levin, 2002)；和資訊等量的序列表徵相較之下，圖對於解題更有效率，原因是圖象資料展佈於平面，每個元素都可任意相互連結；而文句資料是以序列的方式呈現，每個元素間僅和相鄰元素相連結 (Larkin & Simon, 1987)。

畫圖另一個目的是具體化問題(Nickerson, Perkin & Smith, 1985；Markovits, 1986)，一旦圖形被畫出來時，解題者便能夠透過感官過程記住問題，同時，問題的視覺表徵能夠使得某些沒有被注意到的部份關係更加明顯。尤其是需要逐步審查題目中的細節時，無法單靠想像，Polya(1957)建議畫張圖，因爲無法同時想像所有細節，而且想像的細節可能會忘記，畫在紙上的細節可以保留，能省去重新回憶的各種麻煩。

二、觸發解題時所需要的相關知識

圖有傳遞訊息的功能((Parzysz, 1991)，幾何解題時常需要呈現題目中幾何物體的配置關係(如：垂直、四點共圓)，而圖能夠呈現這層關係(Cheng, 1996)，有利於同時掃描大部分的資訊(Parzysz, 1991)，圖形是一種輔助邏輯聯繫的工具(Polya, 1957)，圖及符號和數學思維有密切的聯繫，它們的使用有助於思維，能觸發解題時所需要的相關知識(Polya, 1957)。

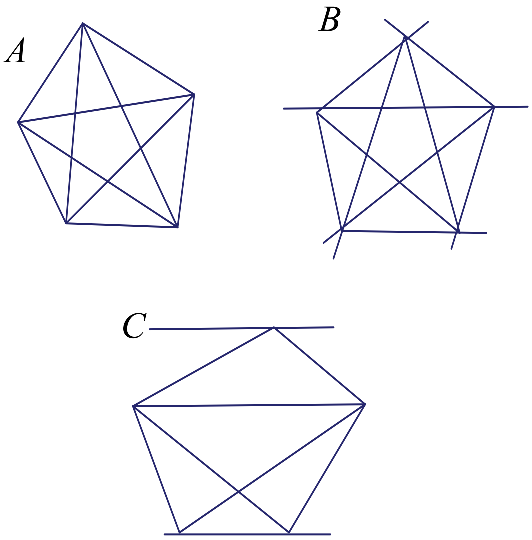
前述例子中，可從三種不同的情境脈絡理解圖一，在每一條脈絡下，將觸發相關的知識，當圖形改變時，就必須設定新的架構以理解新的情境脈絡，開啓新的解題途徑。需要謹慎的是，幾何活動中雖然能由圖形或實體所引發的心象辨認出幾何物件與觸發相關知識，不過還是要透過定義、概念與推理活動來確認 (Fischbein, 1993)。

三、促進問題情境的理解

解題活動中，解題者所畫的草圖有雙重意義，畫圖能增進問題情境的理解，有助解題(Bishop, 1989)；同時，圖也是一面鏡子，草圖是問題情境的外在表徵(Nunokawa , 1994；Carney & Levin, 2002)，它反映了解題者對問題情境結構的理解，透過逐步理解題意或是掌握題目中之關係後，解題者所繪的圖形便隨之逐

漸改變(Nunokawa, 1994, 1997, 2004)，因此，草圖成爲研究者(教師)理解受測者(學生)解題進程的工具。

Nunokawa (1994)將草圖分成三類。第一類的圖是對問題結構的自然(naïve)反應，顯示解題者在閱讀問題後將文字敘述直接轉譯成圖(如圖三 A)；第二類的圖是解題者自行從題目中建立關係後所畫的圖，顯示解題的進展，解題者已經從問題敘述中的等積關係自行推出平行關係(如圖三 B)；第三類的圖顯示解題者已經理解問題情境並能推廣，將原來的五邊形看成『一組平行線間的兩個等積三角形』加上『一個”帽子”』(如圖三 C)。解題者在解題時所畫的草圖，反應解題者對於問題情境的理解，從結果來看，三個草圖幾乎一樣，應從原案與錄影帶中考察畫圖的方式及順序才能區辨。在他的研究中，解題者一共畫了十九個圖之後，才順利解出題目。



圖三

四、輔助組織解題資訊

解題受阻時，有必要重新理解問題(Mason, Burton, & Stacey, 1982)，解題者必須再度從幾何圖形中辨認出某些熟悉的特徵或資訊，當新的、可能有用的知識被活化並應用到題目中，能對問題產生新的理解，進行重新建構，爲了再次理解問題，必須分別考慮每一個已知條件，然後把各部分重新統一起來，當作一個整體來考慮，力圖同時看到問題所需要的各種聯繫(Polya, 1957)。在此，圖扮演輔助組織資訊的角色，如果沒有把圖畫在紙上，解題者幾乎不能分開處理與重組上述所有細節。

解題受阻時，亦可考慮重組視界與增添輔助線(Polya, 1957；Yerushalmy & Chazan, 1990)，重組視界與增加輔助線的目的在於對於原圖產生新的理解，辨認出圖中各種元素之間一些尚未觀察到的關係。爲了更好地組織問題，必須捨棄一些曾一度被認爲是與題目有關的東西(Polya, 1957, p296)。

叁、圖無法幫助幾何解題的原因

前述內容說明圖形對於幾何解題有正面的助益，但是，有可能因爲某些原因使得圖形無法在解題活動中發揮功能，可能的原因有三，彙整如下：一、無法理解圖的特殊性；二、受標準圖形的影響以致無法以各種觀點讀圖；三、圖的誤用。

一、無法理解圖的特殊性

圖包含社會與文化的規約(Parzysz, 1991, p.586)，例如：美國國旗中星星與橫條的數目有其歷史文化的意涵(Moore & Dwyer, 1994, p.140)；某些專業領域(如:熱力學)的圖之封閉曲線面積與循環的方向性有其專業領域上的特殊意涵(Cheng, 1996)，本文中圖一與圖二的視覺特性相近，但各有其獨特的概念脈絡。無法讀圖的原因是不能理解圖中的特殊規約與情境脈絡(Yerushalmy & Chazan, 1990；Roth & Bowen, 2003)，圖形的視覺呈現應與解題者的心智模式相容(Cheng, 1996)。

在解題過程中，圖扮演聯繫邏輯的工作，啓發相關幾何知識與定理(Polya, 1957)，解題者需擁有足夠知識才能理解圖中的特殊規約與情境脈絡(Yerushalmy & Chazan, 1990；Roth & Bowen, 2003)；專業知識用於理解圖中特殊規約與情境脈絡，解題者理解圖的內容之後，將喚起更多的知識應用於解題過程之中；圖的辨認並不是解題成功的主要關鍵，解題成功的關鍵在於能否從圖中得到更多的啓發，Lawson & Chinnappan(2000)指出解題高成就學生和低成就學生在辨認幾何形式的表現並沒有差異，但高成就學生在辨認圖形時所獲取的幾何知識，在數量上與連結程度均優於低成就學生。學生無法順利解題的原因很多，其中一個重大因素是知識結構連結品質不良所致，以致於無法獲取有效知識，導致解題失敗(Prawat ,1989；Lawson & Chinnappan, 1994)。

二、受標準圖形的影響以致無法以各種觀點讀圖

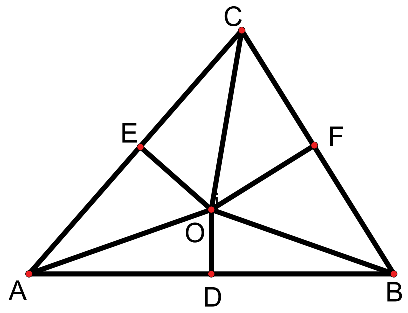
標準圖形的心象容易導致幾何思考僵化與無法辨認非標準圖形(Hoz, 1981；Presmeg, 1986；Bishop, 1989；Yerushalmy & Chazan, 1990)；哪些是標準圖形的心象呢？例如：角一定要有一條水平射線；直角三角形的直角一定要在底邊；三角形的高必定要和底連在一起(Clement & Battista, 1992, p.422)，以受到『三角形的高必定要和底連在一起』標準圖形的心象影響爲例，解題者不容易發覺出鈍角三角形外部的高或是直角三角形斜邊上的高。

無法以各種觀點讀圖的原因，有一部分是受到標準圖形的影響以致幾何思考僵化與無法辨認非標準圖形(Hoz, 1981；Presmeg, 1986；Bishop, 1989；Yerushalmy & Chazan, 1990)；有一部分原因是限於幾何思考的成熟度，例如：以 van-Hiele 幾何發展層次看，視覺層次的學生將圖形視爲一個整體，無法以分析的思維看待圖形的個別部分(Yerushalmy & Chazan, 1990, p.201)。

三、圖的誤用

圖的誤用有兩種情況：一是誤將圖中資訊連結至不相關的資訊，甚至是錯誤資訊(Presmeg, 1986；Yerushalmy & Chazan, 1990)，二是誤把圖形中未經證實的發現當做解題或證明的證據，推導出錯誤的結論(Dvora & Dreyfus, 2004)。

以著名的悖論為例：所有的三角形皆為等腰三角形(圖四，引自凡異出版社，1991，p.54)，即是巧妙地利用圖形上故意畫得不準確之處，而導致矛盾的結論。悖論也可視為解題者誤把圖形中未經證實的發現當做解題或證明的證據，進而推導出荒謬的結論。



圖四、悖論：所有三角形皆等腰(引自凡異出版社, 1991, p.54，經作者重製)

這個悖論的關鍵就在圖四中O點的位置，O點是∠ABC之內角平分線與 $\overline{AB}$ 之中垂線的交點，如果"真的"以尺規作圖或是幾何軟體重新畫圖，就不會得到這個圖，事實上，這個交點並不會在三角形的內部，而會是在三角形的外部，這個不正確的圖，導致荒謬的推論，使得某些解題者渾然不覺。這個例子提醒幾何解題時解題者必須審慎使用圖形中所獲得的訊息，必須經過定義、幾何概念與演繹邏輯的仔細驗證(Fischbein, 1993)。

肆、教育意涵與教學上的建議

根據前面的論述，數學解題過程中，圖具有減少認知負荷、觸發資訊、促進理解問題情境與組織解題資訊等多項功能。理解圖是不容易的，需有足夠的知識才能充分理解圖的內容、符號、規約與特殊情境脈絡，在讀圖過程中，應避免功能固著，保持解譯的彈性，嘗試以各種觀點解讀圖中資訊，同時提醒自己避免誤用資訊。

在教學上，有六點建議：

一、加強數學概念之間的連結，加強數學概念、圖形與數學定義之間的連結與融合(Fischbein, 1993)；

二、明確指出畫圖過程中圖形所傳遞的訊息與這些訊息對於解題過程的幫助(Parzysz, 1991)，鼓勵教師在講解幾何題時，能邊畫圖，邊分析題目的意義，強調畫圖過程中可觸發哪些資訊？這些資訊又可以和題目進行何種情況的連結？教師應重視讀圖過程中反覆結構化的解譯過程，並非僅把圖當做成品；

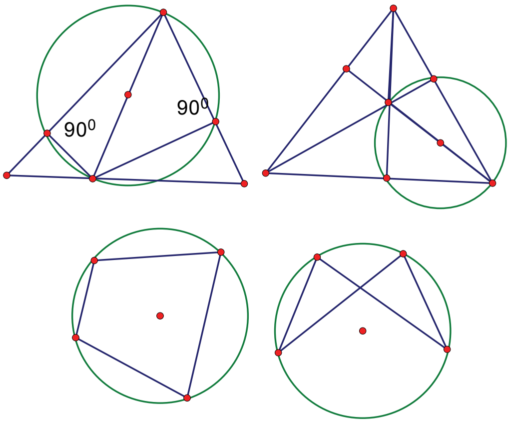
三、涉及圖的教學時，應對於圖中內容、符號與脈絡進行溝通，以增進圖的理解(Roth & Bowen, 2003)，教師應提供學生讀圖的機會，分享讀圖的經驗與從圖中所得到的絃外之音；

四、鼓勵一圖多解與一題多解，對於解譯面向與解題途徑進行整體理解；

五、嘗試變化圖形，增加脈絡的豐富性(Yerushalmy & Chazan, 1990)，如：同一概念的不同情境(如：四點共圓，如圖五)、同一個圖形可能的連續變化(如：弦經過連續變化之後變

成切線)、類似圖形但不同的情境脈絡(如：本文中的圖一及圖二)；

六、提供實例或介紹悖論，打破眼見為憑的迷失，強調幾何證明中演繹邏輯不可或缺的角色。



圖五、不同情境下的四點共圓

伍、結語

幾何解題過程中，圖具有減少認知負荷、觸發資訊、促進理解問題情境與組織解題資訊等多項功能，然而，僅透過直覺讀圖或是利用圖中未經證實的發現而進行幾何推論，容易導致荒謬的結論是幾何解題與教學時應注意的問題。

讀圖過程是反覆建構與解構的過程，需有足夠知識才能充分理解圖的內容、符號、規約與特殊情境脈絡，同時保持解譯的彈性，嘗試以各種觀點解讀圖中資訊。因此，教學過程中，應加強數學概念、圖形與數學定義之間的連結與融合，鼓勵一題(圖)多解，提供變化豐富且動態變化的實例與反例，以增加脈絡的豐富性，同時，教師應以身作則，分享自己的讀圖經驗，示範自己如何從圖中獲取豐富的資訊並應用於解題。

參考文獻

凡異出版社編(1991)：**數學萬花筒**。新竹：凡異。

鄭昭明(2006)：**認知心理學—理論與實踐**(3 版)。台北：桂冠。

蘇育閣 (譯) (1993)：G..Polya 著。**怎樣解題**。台北市：九章。

龐之垣(1999)：**數學解題思維方法**。新竹：凡異。

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1)*, 7-16.

Carney, N. R., & Levin, R. J. (2002). Pictorial illustrations still improve students' learning from text. *Educational Psychology Review, 14(1)*, 5-26.

Cheng, P. C.-H. (1996). *Functional roles for the cognitive analysis of diagrams in problem solving*. Paper presented at the Proceeding of the eighteenth annual conference of the cognitive science society. Hillsdale, NJ.

Clement, D. H., & Battista, M. T. (1992). geometry and spatial reasoning. In D. A. Drouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). Reston,VA: NCTM.

Dvora, T., & Dreyfus, T. (2004). *Unjustified assumptions bases on diagrams in geometry*. Paper presented at the Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 14-18 July.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in*

Mathematics, 24, 139-162.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs:critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158.

Hoz, R. (1981). The effects of rigidity on school geometry learning *Educational Studies in Mathematics, 12*, 171-190.

Larkin, J. H., & Simon, H. A. (1987). Why a diagram is (sometimes) worth ten thousand words. *Cognitive Science, 11*, 65-99.

Lawson, M., & Chinnappan, M. (2000). Knowledge connectedness in geometry problem solving *Journal for Research in Mathematics Education, 31(1)*, 26-43.

Lawson, M. J., & Chinnappan, M. (1994). Generative activity during geometry problem solving: comparison of the performance of high-achieving and low-achieving students' *Cognition and Instruction, 12(1)*, 61-93.

Lowe, R. K. (1994). Selectivity in diagrams: reading beyond the lines *Educational Psychology 14(4)*, 467-491.

Markovits, H. (1986). The curious effect of using drawings in conditional reasoning problems. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 81-87.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking Mathematically*. London: Addison Wesley.

Moore, D. M., & Dwyer, F. M. (Eds.). (1994). *Visual literacy: a spectrum of visual learning*. New Jersey: Educational Technology Publications, Inc., Eaglewood Cliffs

Nickerson, R., Perkin, D., & Smith, E. (1985). *The Teaching of Thinking*. Hillsdale, NJ: Lawrance Erlbaum Association.

Nunokawa, K. (1994). Improving diagrams gradually: one approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics, 14,1*, 34-37.

Nunokawa, K. (1997). Giving new senses to the existing elements: a characteristics of the solution accompanied by global restructuring. *Journal of Mathematical Behavior, 16 (4)*, 365-378.

Nunokawa, K. (2004). Solvers' making of drawings in mathematical problem solving and their understanding of the problem situations. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35(2)*, 173-183.

Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conception at high school level. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 575-193.

Prawat, R. (1989). Promoting access to knowledge, strategy and disposition in students. *Review of Educational Research, 59*, 1-42.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization in high-school mathematics. *For the Learning of Mathematics, 6*, 42-46.

Roth, W.-M., & Bowen, G. M. (2003). When are graphs worth ten thousand words? an expert-expert study. *Cognition and Instruction, 21(4)*, 429-473.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem-solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education, 10(2)*, 173-187.

Schoenfeld, A. H. (1980). Teaching problem-solving skills. *The American Mathematical Monthly, 87(10)*, 794-805.

Shah, P., & Hoeffner, J. (2002). Review of graph comprehension research: implication for instruction. *Educational Psychology Review, 14(1)*, 47-69.

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (1990). Overcoming visual obstacles with the aid of the Supposer. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 199-219.