中學生通訊解題第五十八期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5801

設 $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{2006}, a_{2007}$ 均為整數，且滿足條件 $a_0=0$，$|a_1|=|a_0+1|$，$|a_2|=|a_1+1|$，…，$|a_{2007}|=|a_{2006}+1|$。求 $|a_1+a_2+\cdots+a_{2007}|$ 的最小值為？

參考解答：

$$\because \begin{cases} a_1^{\,2}=a_0^{\,2}+2a_0+1 \\ a_2^{\,2}=a_1^{\,2}+2a_1+1 \\ \quad\vdots \\ a_{2007}^{\,2}=a_{2006}^{\,2}+2a_{2006}+1 \end{cases}$$

$$\because a_{2007}^{\,2}=a_0^{\,2}+2(a_0+a_1+\cdots+a_{2006})+2007$$

又 $a_0=0$，則 $2(a_1+a_2+\cdots+a_{2007})=a_{2007}^{\,2}-2007+2a_{2007}$

故 $|a_1+a_2+\cdots+a_{2007}|=\dfrac{1}{2}\left|(a_{2007}+1)^2-2008\right|$

$\because a_1+a_2+\ldots+a_{2007}$ 為整數

$\therefore$ $a_{2007}+1$ 為偶數

$\because$ $\dfrac{1}{2}\left|44^2-2008\right|=36$，

$\dfrac{1}{2}\left|46^2-2008\right|=54$

$\therefore$ 得

$$|a_1+a_2+\cdots+a_{2007}|\geq\frac{1}{2}\left|44^2-2008\right|=36$$

當 $a_0=a_2=\ldots=a_{1964}=0$，$a_1=a_3=\ldots=a_{1963}=-1$，$a_{1965}=1$，$a_{1966}=2$，$a_{1967}=3$，…，$a_{2007}=43$ 時等號成立。

解題評註：

1. 本題利用遞迴關係式得

   $a_i^{\,2}=a_{i-1}^{\,2}+2a_{i-1}+1$，　$(1\leq i\leq 2007)$

   以及「偶數－偶數」為偶數來解題，得當 $a_{2007}=43$，原式 ≥ 36；由 $a_{2007}=43$，逆推找到一（不是唯一）數列 $\{a_i\}_{i=0}^{2007}$，使原式 ≥ 36 的等號成立；因此原式最小值＝36。有 3 位學生沒有討論等號是否成立、何時成立。
2. 部分學生找出 a_{i-1}　$(1\leq i\leq 2007)$ 所有可能整數值來找原式的最小值，忽略要滿足每個遞迴關係式，以致於作答錯誤。

問題編號
5802

設 x、y 為實數，$x+y+z=6$，$xy+yz+zx=0$， 則 z 的最小值是？。

參考解答：

方法一

$\because x+y=6-z$，$xy=-z(x+y)$

$=-z(6-z)=-6z+z^2$

$\therefore$ x、y 為 $t^2-(6-z)t+(-6z+z^2)=0$

之二根，x、y 為實數

所以 $(6-z)^2-4(-6z+z^2)\geq 0$，故 $-2\leq z\leq 6$。

當 $x=y=4$，z 有最小值 $=-2$。

方法二

$\because$ $x^2+y^2+z^2$

$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=36$

$\therefore$ $x^2+y^2=36-z^2$

又 $x+y=6-z$，由柯西不等式

$(x^2+y^2)(1^2+1^2)\geq(x+y)^2$，

得 $(36-z^2)\times 2\geq(6-z)^2$，故 $-2\leq z\leq 6$。

不等式等號成立時，$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}$，

得 $x=y=4$，z 有最小值 $=-2$。

方法三

$\because$ $x^2+y^2+z^2$

$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=36$

$\therefore$ $x^2+y^2=36-z^2$

$xy=-z(x+y)=-z(6-z)=-6z+z^2$

又 $x^2+y^2\geq 2xy$，

故 $36-z^2\geq 2(-6z+z^2)$，$-2\leq z\leq 6$

當 $x=y=4$，z 有最小值 $=-2$。

方法四

$\because$ $x^2+y^2+z^2$

$=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=36$

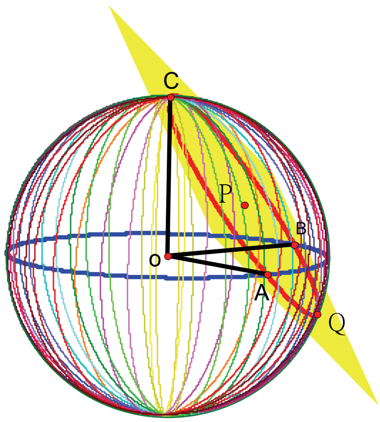
$\therefore$ $x^2+y^2+z^2=36$

原題意即為「求在球面 S：$x^2+y^2+z^2=36$ 與平面 E：$x+y+z=6$ 的交圓中的點的 z 坐標的值最小為？」

設交圓的圓心 P（t , t , t），代入 E，則 t＝2，則圓心 P（2 , 2 , 2）。

平面 E 分別與 x 軸、y 軸、z 軸分別交於 A（6 , 0 , 0）、B（0 , 6 , 0 ）、C（0 , 0 , 6），ΔABC 為正三角形。

$\because \overline{PC}\perp\overline{AB}$，$\overline{AB}$ 在 xy 平面，若交圓中 Q 點的 z 坐標有最小值，則 $\overline{PQ}\perp\overline{AB}$，P 點為 $\overline{CQ}$ 中點，得 Q（4 , 4 , −2 ），Q 點的 z 坐標有最小值＝−2。

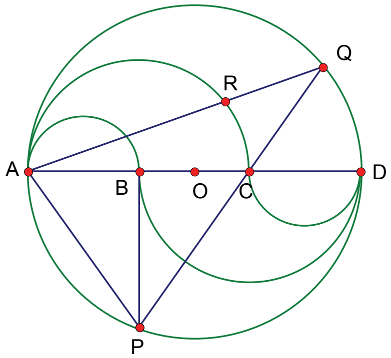


解題評注：

1. 利用實係數一元二次方程式有實根，判別式≥ 0，作答者有 12 人。利用柯西不等式作答者有 1 人。將原題意轉換成平面與球面的交圓的問題來作答者有 1 人。
2. 算出$-2 \leq z \leq 6$，需再算出$z \geq -2$的等號可以成立，即$x = y = 4$，$z = -2$，才得出z有最小值$= -2$。部分學生少此步驟。

問題編號
5803

如圖，半徑為 3 cm 的大圓，$\overline{AD}$為其直徑，B,C 在$\overline{AD}$上且三等分$\overline{AD}$，以$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$分別為直徑作半圓。自 B 作直線垂直$\overline{AD}$交大圓於 P 點，PC 直線交大圓於 Q 點，連接$\overline{AQ}$交另一圓於 R 點，試求$\overline{QR}$ = ________



參考解答：

在此提供兩位學生的做法供參考

方法一

$\because$ ∠APC=∠APQ=∠ADQ

=∠CDQ=∠QDC

$\therefore$ ∠CAP=∠DAP=∠DQP

=∠DQC=∠CQD

$\therefore \triangle$APC～$\triangle$QDC，$\therefore \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DQ}}$

$\overline{PC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{BA}^2 = \overline{PA}^2$

$\Rightarrow \overline{PC} = \overline{PA} \Rightarrow \overline{DC} = \overline{DQ}$

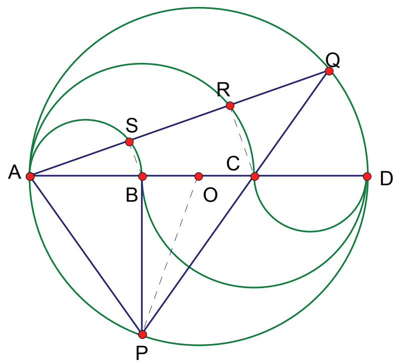
又$\because$ ∠RAC=∠QAD，

∠ARC=90°=∠AQD，

$\therefore \triangle$AQD～$\triangle$ARC，$\therefore \dfrac{\overline{RQ}}{\overline{AQ}} = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$

$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DQ}^2} = \sqrt{36-4} = 4\sqrt{2}$

$\overline{RQ} = 4\sqrt{2} \cdot \dfrac{2}{6} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$



方法二

連接$\overline{PD}$，$\overline{QR} = \dfrac{1}{3}\overline{AQ}$，設

$\overline{BP} = x$ 則 $\overline{AP} = \sqrt{4+x^2}$,

$\overline{PD} = \sqrt{16+x^2}$

圓內冪性質 $\overline{AD}\times\overline{BP}=\overline{AP}\times\overline{PD}$

得 $\overline{AP}=2\sqrt{3}=\overline{PC},\overline{PD}=2\sqrt{6}$

又∵ΔAQC～ΔPDC，

$$\therefore\ \frac{\overline{AQ}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{PC}}\Rightarrow\frac{\overline{AQ}}{2\sqrt{6}}=\frac{4}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow\overline{AQ}=4\sqrt{2}$$

$$\therefore\ \overline{RQ}=4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

解題評註：

此題只要利用相似形與圓的性質，就可以解出來，因為在國中課本並沒有學過解析幾何，故不建議用這個方法來解。至於圓冪性質屬於選修部分，可以當做練習與參考。

問題編號
5804

證明：有無限多個整數 n 使得三個數 n、$n+1$、$n+2$ 每個數都可以寫成二個整數平方的總和。

[例如：$0=0^2+0^2$，$1=0^2+1^2$，$2=1^2+1^2$]

參考解答：

觀察到：$\begin{cases}0=0^2+0^2\\1=1^2+0^2\\2=1^2+1^2\end{cases}$，$\begin{cases}8=2^2+2^2\\9=3^2+0^2\\10=3^2+1^2\end{cases}$，…

設 $\begin{cases}n=(x-1)^2+y^2\\n+1=x^2+0^2\\n+2=x^2+1^2\end{cases}$ $(x,\ y$ 為整數$)\ldots(※)$

則 $n=x^2-2x+1+y^2=(n+1)-2x+1+y^2$

$$\Rightarrow\ 2x=y^2+2\ \Rightarrow\ x=\frac{y^2}{2}+1$$

由於 x 為整數，所以 y 為偶數，令 $y=2m$（m 為整數），則 $x=2m^2+1$ 代入 (※)

得到 $\begin{cases}n=(2m^2)^2+(2m)^2\\n+1=(2m^2+1)^2+0^2\\n+2=(2m^2+1)^2+1^2\end{cases}$ （m 為整數）

所以有無限多個整數 n，使得 n，$n+1$，$n+2$ 皆可寫成兩個整數平方的總和。例如：$(m,n)=(0,0)$，$(1,8)$，$(2,80)$，…

$\begin{cases}0=0^2+0^2\\1=1^2+0^2\\2=1^2+1^2\end{cases}$，$\begin{cases}8=2^2+2^2\\9=3^2+0^2\\10=3^2+1^2\end{cases}$，

$\begin{cases}80=8^2+4^2\\81=9^2+0^2\\82=9^2+1^2\end{cases}$，…。

此外，另有一些其他形式的解如下：（m 為整數）

$$\begin{cases}n=(2m^2+2m)^2+0^2\\n+1=(2m^2+2m)^2+1^2\\n+2=(2m^2+2m-1)^2+(2m+1)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}n=(2m^2-2m)^2+0^2\\n+1=(2m^2-2m)^2+1^2\\n+2=(2m^2-2m-1)^2+(2m-1)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}n=(2m^2+2m)^2+0^2\\n+1=(2m^2+2m)^2+1^2\\n+2=(2m^2+2m-1)^2+(2m+1)^2\end{cases}$$

$$\begin{cases} n=(m^2+m)^2+(m^2+m)^2 \\ n+1=(m^2+2m)^2+(m^2-1)^2 \\ n+2=(m^2+m-1)^2+(m^2+m+1)^2 \end{cases}$$

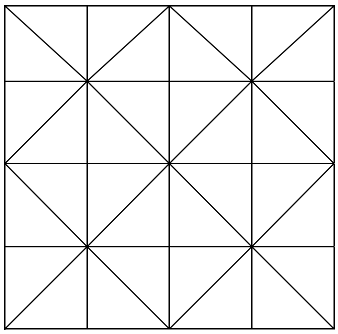
解題評註：

本題是希望同學經由觀察某些答案的規律去猜測某些解答的形式，進而推導出一般形式的解答。

問題編號

5805

如圖，由 16 個小正方形組成的大正方形，試問圖中共可形成幾個等腰三角形？



參考解答：

解法 1

設小正方形邊長爲 a，則腰長爲 a 之等腰三角形有 32 個；腰長爲 $\sqrt{2}a$ 之等腰三角形有 24 個；腰長爲 $2a$ 之等腰三角形有 20 個；腰長爲 $2\sqrt{2}a$ 之等腰三角形有 8 個；腰長爲 $3a$ 之等腰三角形有 8 個；腰長爲 $4a$ 之等腰三角形有 4 個；所以共有 32 + 24 + 20 + 8 + 8 + 4 = 96 個等腰三角形。

解法 2

因圖中所的的等腰三角形均爲等腰直角三角形，將所有交點分爲右圖中 A, B, C, D, E, F 六類，其中

以 A 爲頂角的等腰直角三角形有 2 個，

以 B 爲頂角的等腰直角三角形有 3 個，

以 C 爲頂角的等腰直角三角形有 4 個，

以 D 爲頂角的等腰直角三角形有 5 個，

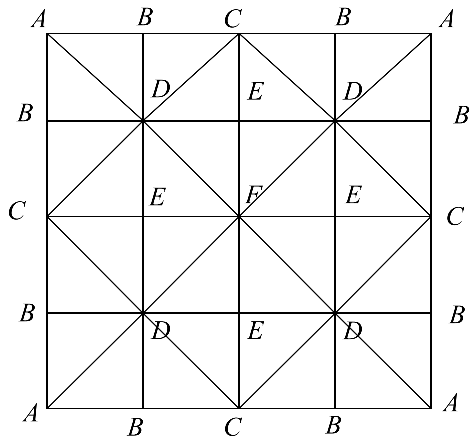
以 E 爲頂角的等腰直角三角形有 4 個，

以 F 爲頂角的等腰直角三角形有 12 個，

所以共有

$$2\times4+3\times8+4\times4+5\times4+4\times4+12\times1=96$$

個等腰三角形



解題評註：

本題需對所有的等腰三角形作適當之分類，即可確保不會漏數，分類方式有許多，同學的方法大多以等腰直角三角形的腰長、底長或面積作爲分類依據，再分別數出各類總數。其中有位同學以頂角來作分類較爲特別。