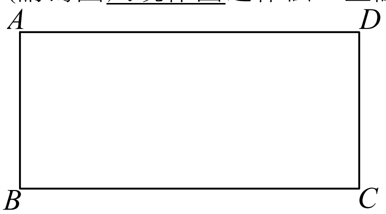
中學生通訊解題第五十九期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
5901

已知長方形 $ABCD$ 中，$2\overline{AB}<\overline{AD}$，試在 $\overline{BC}$ 上找點 P，使 $\overline{AP}\times\overline{DP}$ 有最小值。(請寫出尺規作圖之作法，並証明)



參考解答：

作法：

以 $\overline{AD}$ 爲直徑畫圓交 $\overline{BC}$ 於兩點 S_1、S_2，則 S_1(或 S_2)即爲所求之 P 點。

証明：

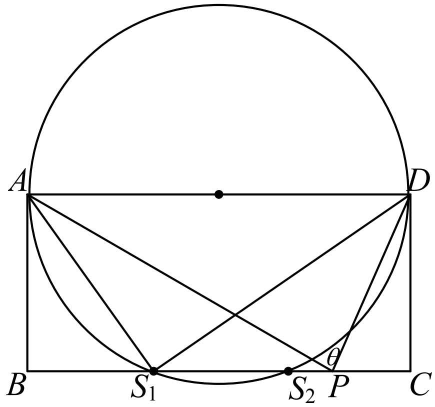
$\because$ ΔAPD 之面積 $=\frac{1}{2}\overline{AP}\times\overline{DP}\sin\theta=\frac{1}{2}\overline{AS}\times\overline{DS}$ $(\angle ASD=90^0\Leftrightarrow S=S_1$ 或 $S_2)$

$\therefore \overline{AP}\times\overline{DP}\ge\overline{AS}\times\overline{DS}$

"=" 成立 $\Leftrightarrow P=S_1$ 或 S_2

解題重點：

這是一個測試半圓上的圓周角等於 90 度的問題，當然也可以坐標化處理，或是分類討論。但我們希望的是同學們能找到簡單直接的方法來解題。



問題編號
5902

試求
$$\frac{1}{\frac{1}{1950}+\frac{1}{1951}+\frac{1}{1952}+\cdots+\frac{1}{2005}}$$
之整數部位爲何？又其小數點後第一位數字爲何？。

參考解答：

$$\because \frac{1}{1950}+\frac{1}{2005}$$
$$=\frac{3955}{(1950)(2005)},\frac{1}{1951}+\frac{1}{2004}$$
$$=\frac{3955}{(1951)(2004)},\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{1978}+\frac{1}{1979}=\frac{3955}{(1978)(1979)}$$

$$原式=\frac{1}{3955(\frac{1}{(1950)(2005)}+\frac{1}{(1951)(2004)}+\cdots+\frac{1}{(1978)(1979)})}=A$$

$$\because\frac{28}{(1978)(1979)}\le\frac{1}{(1950)(2005)}+\frac{1}{(1951)(2004)}+\cdots+\frac{1}{(1978)(1979)}\le\frac{28}{(1950)(2005)}$$

$$\frac{(1950)(2005)}{(3955)(28)}\le A\le\frac{(1978)(1979)}{(3955)(28)}\therefore 35.30567094\le A\le 35.34822106$$

解題評註：

事實上，本題之主要目的就是要測驗同學之估計能力，但是要在技術上調整在合理之範圍

問題編號
5903

有聖誕卡、生日卡、賀年卡、及萬用卡等 4 種不同的卡片，每一種皆有若干張。15 個人從中任取，每一種卡片皆可取 0 或 1 張，每個人所取之卡片總數皆不爲 0，且每人所拿的卡片皆不完全相同。另外，若 A 有的卡片，B 也都有，則稱 B 涵蓋 A；例如：A = {聖誕卡, 生日卡}，B = {聖誕卡, 生日卡, 賀年卡,萬用卡}，則稱 B 涵蓋 A。

現在從這 15 個人中任選若干個人出來(人數≥ 2)，且這些人中任兩人所持有的卡片皆不互相涵蓋，其選法有多少種？

參考解答：

因爲 4 張卡片的擁有狀況恰有 $2^4-1=15$ 種，所以每個人皆不同。情形如下：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
聖誕卡	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1
生日卡	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1
賀年卡	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
萬用卡	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1

設 $A=\{a|\ a$ 爲恰取一張者$\}$，$B=\{b|\ b$ 爲恰取兩張者$\}$，$C=\{c|\ c$ 爲恰取三張者$\}$，$D=\{d|\ d$ 爲全取者$\}$。則 $n(A)=C_1^4=4$，$n(B)=C_2^4=6$，$n(C)=C_3^4=4$，$n(D)=1$。

(1) 若選出者全屬於 A，則方法有 $2^4-1-4=11$ 種。
(2) 若選出者全屬於 B，則方法有 $2^6-1-6=57$ 種。
(3) 若選出者全屬於 C，則方法有 $2^4-1-4=11$ 種。
(4) 若選出者恰有 A 及 B 中之成員，則方法有 $C_1^4(2^3-1)+C_2^4\cdot 1=34$ 種。
(5) 若選出者恰有 B 及 C 中之成員，考慮每一個人沒有拿到的卡片集合，亦不可互相涵蓋，則方法數同(4)，有 34 種。
(6) 若選出者恰有 A 及 C 中之成員，則方法有 4 種。
(7) 若選出者恰有 A、B、C 中之成員，則方法數爲 0。

故總方法數爲 11 + 57 + 11 + 34 + 34 + 4 = 151 種。

解題評註：

在計數時，需先將所有人作適當之分類，本題做錯的同學皆爲某幾類計數錯誤。除利用如解答之分類方法計數外，亦有同學使用所取人數作爲分類方式。本題亦可試著推廣到對任意數量 n 的卡片，由 2^n-1 個人擁有所有不同狀況之卡片。

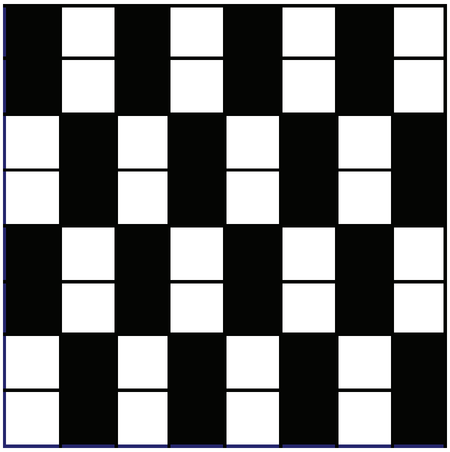
問題編號
5904

如圖，將一個 8×8 的變色棋盤分割成 n 個矩形，規定不能破壞任何一格，而且必須滿足下列條件：

(1) 每一個矩形中白格與黑格的個數相等；
(2) 若 a_i 爲第 i 個矩形的面積，則

$$a_1<a_2<\cdots<a_i<\cdots<a_n$$

試問：滿足上述分割的最大可能 n 值爲何？同時畫出此 n 值的所有分割。



參考解答：

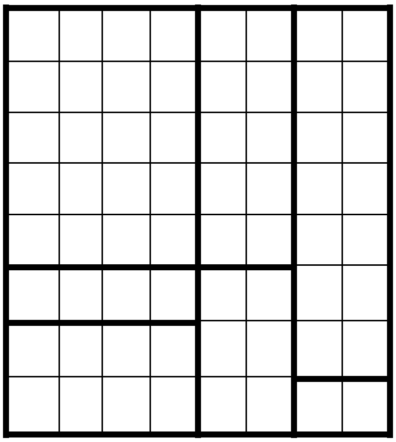
由條件(1)：每一個矩形中白格與黑格的個數相等；得每一分割矩形之面積均爲偶數。由條件(2)：若 a_i 爲第 i 個矩形的面積，則 $a_1<a_2<\cdots<a_i<\cdots<a_n$；若 $n=8$，則最小面積爲

$2+4+6+\cdots+16=72>64$，故 $n<8$。

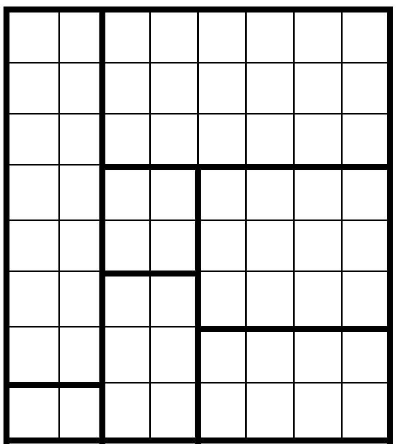
依面積和討論，可能發生之情形有(2,

4, 6, 8, 10, 14, 20)，(2, 4, 6, 8, 10, 12, 22)，(2, 4, 6, 8, 12, 14, 18)，(2, 4, 6, 10, 12, 14, 16)，(2, 4, 6, 8, 10, 16, 18)；其中(2, 4, 6, 8, 10, 12, 22)此組因含面積爲 22 的矩形，長寬必爲(1, 22)或(2, 11)，必畫不出來。其他各組之分割法如下：

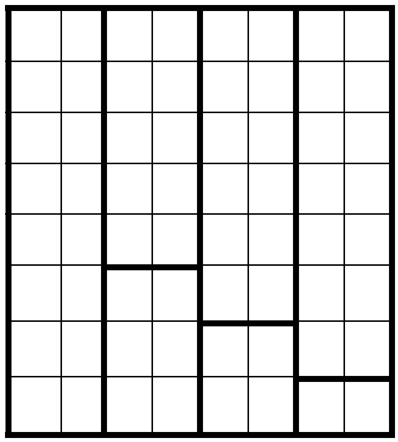
(1) (2, 4, 6, 8, 10, 14, 20)



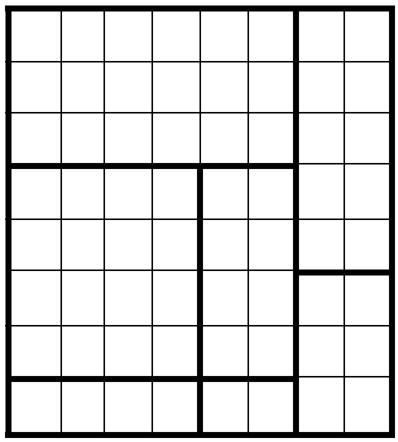
(2) (2, 4, 6, 8, 12, 14, 18)



(3) (2, 4, 6, 10, 12, 14, 16)



(4) (2, 4, 6, 8, 10, 16, 18)



解題評註：

要說明最多有 7 個矩形，需先證明不可能由 8 個以上的不同矩形構成之外，還必須說明由 7 個不同矩形構成是可行的。而說明 7 個矩形的可行性可直接構造來說明存在性，得 5 分以上之同學皆有完成以上部份。5 分以上未得滿分者，皆爲未完成題目中將所有情形構造出來之要求。

問題編號
5905

甲、乙、丙 3 家夫妻分別上街買蘋果，每個人買的蘋果個數恰好等於他(她)買的每一個蘋果所用金錢的數目。每個男人比他的妻子多用 45 元，並且甲夫比乙妻多買 17 個蘋果，乙夫比丙妻多買 7 個蘋果。試問這 6 個人分別買了多少個蘋果？

參考解答：

設丈夫買 x 個蘋果，妻子買 y 個蘋果，則丈夫用了 x^2 元，妻子用了 y^2 元，依題意

$$x^2 - y^2 = 45 \Rightarrow (x+y)(x-y) = 45$$

$x+y$	$x-y$	x	y
45	1	23	22
15	3	9	6
9	5	7	2

又甲夫比乙妻多買 17 個蘋果，乙夫比丙妻多買 7 個蘋果，故：

甲夫買了 23 個蘋果，甲妻買了 22 個蘋果。

乙夫買了 9 個蘋果，乙妻買了 6 個蘋果。

丙夫買了 7 個蘋果，丙妻買了 2 個蘋果。

解題評註：

此題僅需平方差的公式及整數的因數分解,參與徵答的幾乎都能答對。