

牛頓第二運動定律的錯誤示範

徐國誠

臺北市立成淵高級中學

壹、前言

民國 81 年大學聯考曾經考過一個有關「牛頓第二運動定律」的實驗題，十幾年來，不論是各種參考書籍、補習班講義，或是各種大大小小的考試，都時常出現這個實驗題的蹤跡。一來這是當年聯考的試題，應該具有相當的公信力，二來因為它是實驗題，在實驗題的題數並不多的情況下，它便佔有相當的份量，因此若干學校

的老師，在課堂上也曾經引用過這個試題作為整理分析「牛頓第二運動定律」的觀念所講解的例題。當然，老師教畢一個單元後，能夠把一道設計良好的試題作為講解的例題，這對教學來說應該是正面的，但是如果這道試題本身引導出錯誤的觀念，那麼效果反而適得其反。而此實驗題也正是牛頓第二運動定律的一個錯誤示範。

貳、命題的誤導

當年的試題如下：

甲、乙、丙三位學生用同一套實驗裝置如下圖(a)所示，先後作「牛頓第二運動定律」實驗。在實驗過程中，他們依次把滑車上的砝碼移到掛鉤上，三人分別測得滑車加速度 a 與掛鉤及砝碼的總質量 M 的關係，如下圖(b)所示。假設滑車質量為 m_1 ，掛鉤質量為 m_2 ，砝碼總質量為 m_3 。試分別討論造成此三組數據差異的最可能原因。又圖中三組數據斜率均相同，試問此斜率有何物理意義？

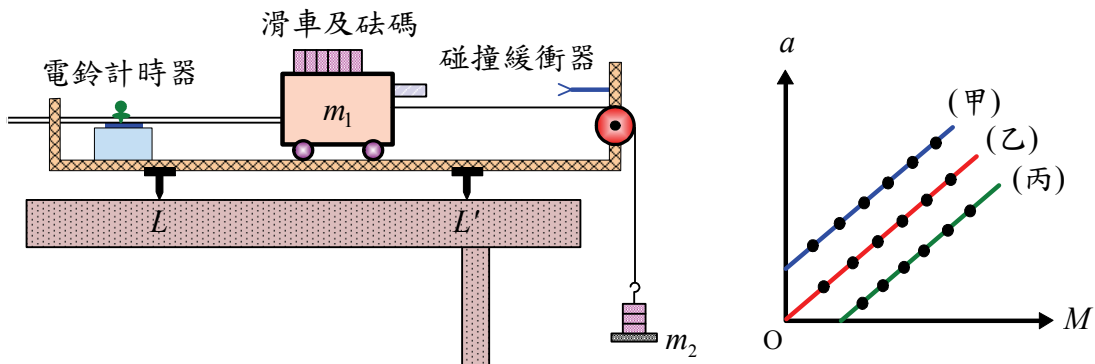


圖 (a)

圖 (b)

試題中出現第一個不恰當的敘述是：「…三人分別測得滑車加速度 a 與掛鉤及砝碼的總質量 M 的關係…」，由此敘述看來 M 應該是掛鉤質量與全部砝碼質量之和，也就是 $m_2 + m_3$ ；然而實驗是要測量使系統移動的外力與加速度的關係，而外力當然是指掛鉤與「掛鉤上砝碼」的重量和，並不是掛鉤與「全部砝碼」的重量和。這雖然只是題目敘述上的瑕疵，但是個人卻認為不應該在這麼重大的考試中出現。

另外該試題出現第二個重大錯誤的地方是圖(b)的三條直線，它們的斜率並不相同，但是題目卻直接說明為「三組數據斜率均相同」，並問此「相同的斜率」有何物理意義。而一般參考書籍或講義對這個問題的解答不外兩種，一種是針對「三組數據斜率相同」而說明此斜率是「每增加單位質量（或增加一個砝碼）所增加的加速度」；另一種則是直接寫出此斜率等於 $\frac{g}{m_1 + m_2 + m_3}$ ，由於 $m_1 + m_2 + m_3$ 正是實驗中滑車、掛鉤以及全部砝碼的質量和，所以此斜率的物理意義就是「實驗時系統的總質量保持不變」，或者是「曲線斜率與系統的總質量成反比」。然而這兩種答案都是不恰當的，我們可以從下面的演算得到驗證。

實驗課本（當時課本是國立編譯館的統一版本）的步驟有明白告訴學生，在實際量度加速度 a 與掛鉤及掛鉤上砝碼的總質量 M 的關係之前，必須將軌道調整至適

當斜度，所謂「適當斜度」是指滑車及滑車上砝碼的重量，沿著軌道上的分量與其摩擦力平衡的時候，其目的是要消除摩擦力的影響因素。而這三組數據差異的原因，在於甲的軌道斜度太斜，使得尚未掛上任何重量時，滑車便有了加速度；丙的軌道斜度不夠，或者軌道呈水平，又或者軌道的傾斜方式剛好相反，即圖(a)中的 L' 位置較 L 高，都有可能造成直線的 M 軸截距為正，表示有掛上少許重量拉動滑車，而滑車仍不產生加速度；另外乙的軌道就是斜度適當，使得直線正好通過原點。

由於題目中已經假設掛鉤及掛鉤上砝碼的總質量為 M ，這裡另外再假設滑車及滑車上砝碼的總質量為 M' ，而當滑車軌道的傾斜角為 θ 時，由圖一 M 與 M' 在其運動方向上的力圖，可以列出二者的運動方程式分別為（這裡對於摩擦力只考慮滑車與軌道間的摩擦，而忽略了滑輪與細繩之間、紙帶與電鈴計時器之間等等的摩擦，當滑車質量夠大時，忽略這些摩擦力應該是在可接受的範圍內）

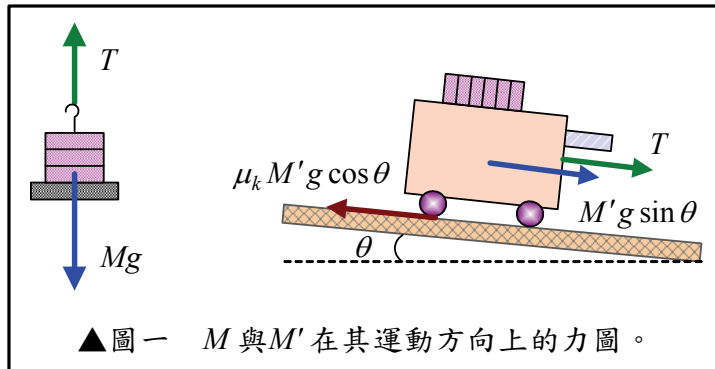
$$Mg - T = Ma$$

$$T + M'g \sin \theta - \mu_k M'g \cos \theta = M'a$$

將二式相加後得到

$$\begin{aligned} Mg + M'g \sin \theta - \mu_k M'g \cos \theta \\ = (M + M')a \end{aligned} \quad \dots (1)$$

因為 $M + M'$ 為滑車、掛鉤以及全部砝碼的質量和（也等於題目中的 $m_1 + m_2 + m_3$ ），此為不變的定值，所以我們令 $M + M' = m_1 + m_2 + m_3 = M_0$ 。因此由第(1)式可得滑車的加速度：



$$a = \frac{g}{M_0} M + \frac{g}{M_0} M'(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \dots (2)$$

一般會把甲、乙、丙三條曲線的斜率視為相同，是因為將第(2)式中的

$\frac{g}{M_0} M'(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$ 當成常數看待，

卻忽略了 M 與 M' 是有關係的，不能將 M' 當成常數。我們把 $M' = M_0 - M$ 代入第(2)式後，得到滑車的加速度應為：

$$a = \frac{g}{M_0} [1 - (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)] M + g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \dots (3)$$

從第(3)式就可以發現直線的斜率

$\frac{g}{M_0} [1 - (\sin \theta - \mu_k \cos \theta)]$ ，與滑車軌道的

傾斜角 θ 是有關聯的，也正因為甲、乙、丙三組實驗的軌道斜度不同，因而三組數據的斜率是不一樣的。另外曲線在 a 軸上的截距為 $g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$ ，由傾斜角 θ 的大小，便可決定 a 軸上截距為正、為負，或者為零。

參、三組數據的交點

由於甲生的數據其 a 軸截距大於零，乙生的 a 軸截距等於零，而丙生的 a 軸截距小於零，因此我們可將此三組數據的直線方程式分別表示為：

$$\text{甲生： } a = \frac{g - \alpha}{M_0} M + \alpha \dots (4)$$

$$\text{乙生： } a = \frac{g}{M_0} M \dots (5)$$

$$\text{丙生： } a = \frac{g + \beta}{M_0} M - \beta \dots (6)$$

其中 α 、 $-\beta$ 分別為甲生、丙生的數據在 a 軸上的截距，而 α 、 β 皆為大於零的常數。從第(4)式至第(6)式可知甲、乙、

丙三條直線的斜率分別是 $\frac{g - \alpha}{M_0}$ 、 $\frac{g}{M_0}$ 和

$\frac{g + \beta}{M_0}$ ，顯而易見的，不僅三條直線的斜

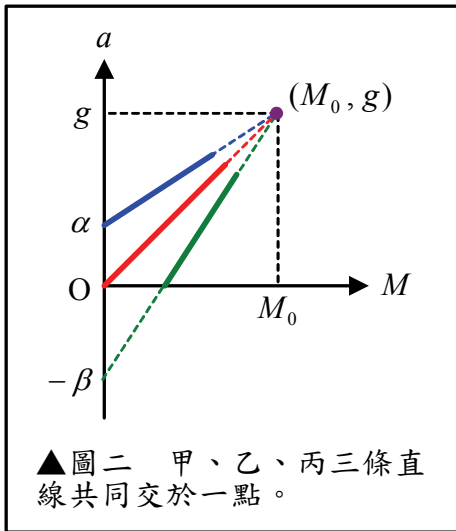
率相異，且其大小的關係應為：甲 < 乙 < 丙。

另外，因為斜率是甲最小，而丙最大，所以三條直線會各自相交，而是否交於一點尚需檢驗第(4)式至(6)式。例如，由

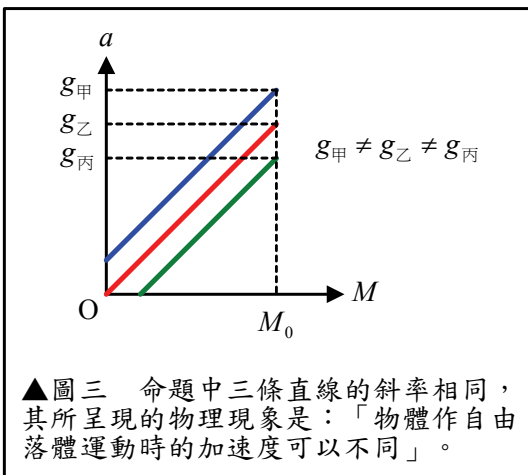
第(4)式、第(5)式聯立求共同解，

$$\frac{g-\alpha}{M_0}M + \alpha = \frac{g}{M_0}M$$

由上式求得甲和乙相交於 $M = M_0$ 處，而此時滑車和砝碼的加速度等於重力加速度 g ；如果由第(5)式、第(6)式求聯立解，同樣也可以得到乙和丙兩條直線的交點仍然在 $M = M_0$ 處。因此我們就可以推論三條直線共同交於點 (M_0, g) ，如圖二所示。



然而交點 (M_0, g) 所代表的物理意義究竟為何呢？由於 M 是掛鉤及掛鉤上砝碼的總質量，而 M_0 是滑車、掛鉤以及全部砝碼的質量和，也就是系統的總質量；這就是說，當我們做實驗時，依次將砝碼從滑車上一個一個移到掛鉤上，最後連滑車也附在掛鉤上了，此時 M_0 就成了 M 的最大值。所以這三條直線有共同交點的物理意義就是，如果將滑車以及全部的砝碼都放置在掛鉤上，那麼無論滑車軌道的傾斜角為何，整個系統將無摩擦力作用，而系統的運動方式就是自由落體，當然滑車與砝碼的加速度就是重力加速度 g 。如果實驗結果如同命題中的敘述是「三組數據斜率均相同」，那麼這三組實驗所呈現出來的現象是，當 M 等於最大值 M_0 時，其所對應的加速度（此時為重力加速度）並不相等，如圖三所示；換句話說，假如甲、乙、丙三條直線的斜率相同，最後應該可以得到一個結論，就是「物體作自由落體運動時的加速度可以不同」，這就不符合自由落體的運動模式。



肆、模擬考題的更正

其實有許多學校的教師都知道這一題本身是有問題的，但是礙於授課時數以及進度壓力，而無法對學生多做說明，學生自己在複習課業時往往就被動地接受參考書或講義上的答案，這是相當可惜的。民國87年9月的台北區公立高中第一次聯合模擬考，該次的命題老師試圖要更正聯考題的錯誤，於是也出了一題「牛頓第二

運動定律」的實驗題，試題如下。

如果直接引入聯考題的說法，那麼(d)小題的答案應該是兩條直線斜率相等，但命題老師給的參考答案卻是「乙線斜率 > 甲線斜率」。我們從前面的分析也可以知道，即使縱軸與橫軸對調，這兩條直線還

是會交於一點，既然交於一點，那麼乙線斜率當然就會大於甲線。民國 87 年 9 月至今已經超過九年了，九年多來還是有這麼多參考書、講義還在解釋「相同斜率」的物理意義，可見這一聯考題的影響力是多麼深遠。

甲與乙兩生以同組器材作「牛頓第二運動定律實驗」，實驗裝置如下圖(c)所示，其中掛鉤及掛鉤上砝碼的質量共為 m ，系統的加速度為 a ，在系統總質量保持一定的情形下，兩生依其實驗數據繪成外力 mg 與加速度 a 的關係如下圖(d)所示，請簡要回答下列問題：

- (a) 是否需要先測量滑車的質量？
- (b) 乙生所得實驗之直線未通過原點，其原因為何？
- (c) 若乙生欲使其實驗結果的直線通過原點，應如何調整其裝置？
- (d) 若甲乙兩生實驗時所用系統總質量均為 M ，試比較圖中兩生所得的直線斜率之大小，並簡述其理由？

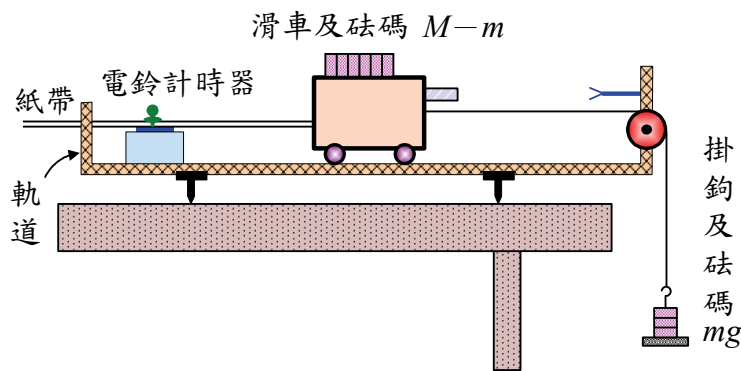


圖 (c)

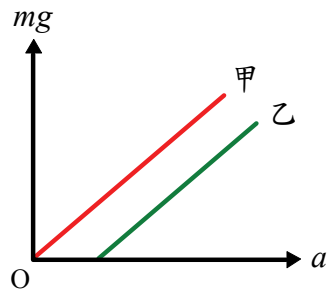


圖 (d)

伍、結論

這一聯考題太多人引用了，但是因為試題本身的敘述就有錯誤，在沒有察覺錯誤的情況下在課堂上引用，不僅自誤而且誤人。如果學校的授課時數還算充足，老師也可以在實驗課時，引導學生做不同傾斜角的實驗數據，然後將這些實驗數據曲線的延長線畫出來，看它們是平行線還是交於一點的直線。

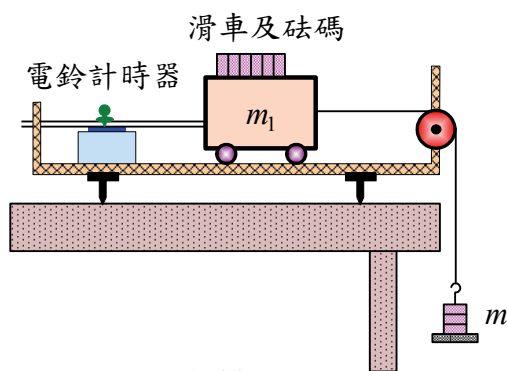


圖 (e)

陸、後記

民國 96 年 3 月台中區九十五學年度「大學入學指定科目考試第二次聯合模擬考」，同年 4 月台北區九十五學年度「大學入學第二次指定考科聯合模擬考」，不約而同的都出了這個實驗的類似題。這裡僅列出該二道試題，和命題老師所附的參考答案供讀者參考。

【台中區試題】

某生作「牛頓第二運動定律」實驗，裝置如圖(e)，將測得滑車加速度 a 與掛鉤及砝碼總質量 m 作圖，得圖(f)，有關本實驗的敘述何者正確？(A)滑車軌道一定要調成水平 (B)欲驗證 $a \propto F$ 關係時，要依次將滑車上的砝碼移到掛鉤上，保持系統總質量一定 (C)如圖(f)所得直線不通過原點，是因為滑車軌道太傾斜 (D)圖(f)直線之斜率，表示滑車系統(滑車+滑車上的砝碼+掛鉤+掛鉤上的砝碼)的總質量大小 (E)調整滑車軌道傾斜角，所得 $a-m$ 圖斜率會改變。

Ans：(B)(C)

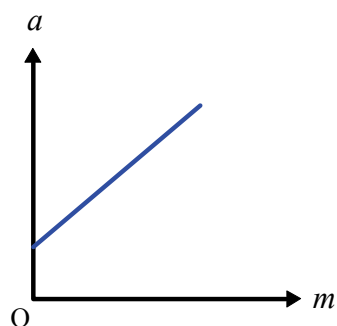


圖 (f)

【台北區試題】題目附圖與台中區試題相同)

某生做「牛頓第二運動定律實驗」，裝置如圖(e)，該生依次將滑車上槽碼移到掛鉤上，設掛鉤及槽碼總質量 m ，測得滑車加速度 a ，繪成 $a-m$ 關係圖，如圖(f)，則：

- (1) 圖(f)直線不通過原點，試說明其原因為何？
- (2) 試說明圖(f)直線之斜率，有何意義？

Ans：(1)軌道向右傾斜太多；

(2)直線斜率與系統總質量成反比。